......................$\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varepsilon\zeta\eta\theta\vartheta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi\pi\varpi\rho\varrho\sigma\varsigma\tau\upsilon\phi\varphi\chi\psi\omega$......................

Série d'exercices : Familles sommables

On définit La fonction **zêta de Riemann** sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et on admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice № 1. Famille indexée par $\mathbb{Z}$ Aller à la correction

Soit $q \in \mathbb{C}$, montrer que

$$(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est sommable} \iff |q| < 1$$

et pour tout $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} = \frac{1+q}{1-q}$$

Exercice № 2. Aller à la correction

① Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad p+q=n\}$, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et déterminer la cardinal de I_n.

② Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable, si et seulement si, $\alpha > 2$.

$$\forall \alpha > 2, \quad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \zeta(\alpha-1)$$

Exercice № 3. Aller à la correction

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels telle que la famille $(n^6 a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable.

① Montrer que la famille $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6 a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$

② En déduire que les familles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables.

Exercice № 4. Aller à la correction

① Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

② Montrer que la famille $\left(\frac{n+m}{2^{n+m}}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et sa somme vaut 8.

Exercice № 5. Aller à la correction

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$.

① Justifier que, pour tout $n \geqslant 2$, la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{z^k}{n^k}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

② En déduire que la famille $\left(\frac{z^k}{n^k}\right)_{k,n\geqslant 2}$ de nombres complexes est sommable.

③ Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^2}{n(n-z)}=\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1)z^k$.

④ En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1)$.

Exercice № 6. Aller à la correction

Soit $x\in]-1,1[$.

① Montrer que la famille $\left(\frac{x^p}{n^{p+1}}\right)_{n,p\geq 1}$ est sommable.

② En déduire que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\zeta(p+1)x^p=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n}\right)$.

Exercice № 7. La constante d'Euler Aller à la correction

① On définit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$.

(a) Montrer que $x_n-x_{n-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^2}$.

(b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Notons γ sa limite. γ s'appelle la constante d'Euler.

(c) Établir la relation $\gamma=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

② (a) Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{k,n\geq 2}$ est sommable.

(b) On admet que $\forall x\in]-1,1[,\ \ln(x+1)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)=\gamma$

Exercice № 8. Indicatrice d'Euler Aller à la correction

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ \ pq=n\}$ et $\varphi(n)=\operatorname{card}\{k\in[\![0,n]\!],\ \ k\wedge n=1\}$.

On admet que $\displaystyle\sum_{\substack{p=1\\ p\text{ divise } n}}^{n}\varphi(p)=n$.

① Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

② Établir la relation $\forall x>2,\ \ \displaystyle\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\varphi(p)}{p^x}$.

Corrigé de l'exercice № 1. Retour à l'énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $a_n = q^{|n|}$.

On sait que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, si et seulement si, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{-n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ sont absolument convergentes.

Dans ce cas on a : $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{-n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$

Comme les séries géométriques $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{-n} = \sum\limits_{n\geq 0} q^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n = \sum\limits_{n\geq 1} q^n$ sont absolument convergentes, si et seulement si, $|q| < 1$, alors $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, si et seulement si, $|q| < 1$.

Pour tout $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{|-n|} + \sum_{n=1}^{+\infty} q^{|n|} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = 1 + 2q\frac{1}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}$$

Corrigé de l'exercice № 2. Retour à l'énoncé

① Montrons que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

• Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(p,q) \in I_{p+q}$ donc $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

• Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq m$, par l'absurde supposons que $I_n \cap I_m \neq \varnothing$.

Soi $(p,q) \in I_n \cap I_m$, alors $(p,q) \in I_n$ et $(p,q) \in I_m$, par suite $p+q = n$ et $p+q = m$, d'où $n = m$ ce qui est absurde.

Donc $\begin{cases} \mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \\ n \neq m \Longrightarrow I_n \cap I_m = \varnothing \end{cases}$ alors $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{(0,n), (1,n-1), ..., (n,0)\}$ donc $\text{card}(I_n) = n+1$.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est fini, alors $\left(\dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in I_n}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{\text{card}(I_n)}{(n+1)^\alpha} = \frac{n+1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on en déduit

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \text{ est sommable } &\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \left(\dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in I_n} \text{ est sommable} \\ \qquad\text{et} \\ \sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{(p,q)\in I_n} \dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right) \text{ converge absolument} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha}\right) \text{ converge absolument} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \text{ converge absolument} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \text{ converge absolument} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \text{ converge} \\
&\Longleftrightarrow \alpha - 1 > 1 \\
&\Longleftrightarrow \alpha > 2
\end{aligned}$$

D'après le théorème de somation par paquets, pour tout $\alpha > 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\\
&= \zeta(\alpha-1)
\end{aligned}$$

En particulier $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^3} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Corrigé de l'exercice № 3. Retour à l'énoncé

① • Montrons que la famille $(n^2a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

$\forall n\in\mathbb{Z}^*,\ |n^2a_n| = n^2|a_n| = \dfrac{1}{n}\times(n^3|a_n|) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+n^6a_n^2\right)$. car $\forall a,b\in\mathbb{R},\ |ab|\leq\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

Comme les familles $(n^6a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ sont sommables, par linéarité la famille $\left(\dfrac{1}{2}\left(n^6a_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable, ainsi par le critère de comparaison, $(n^2a_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable, par suite $(n^2a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

• Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Par l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2|a_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n}\times(n^3|a_n|) \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^6a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(-n)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

② • $\forall n\in\mathbb{Z}^*,\ |a_n| = \dfrac{1}{n^3}\times(n^3|a_n|) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^6}+n^6a_n^2\right)$. car $\forall a,b\in\mathbb{R},\ |ab|\leq\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

Comme les familles $(n^6a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\left(\dfrac{1}{n^6}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ sont sommables, par linéarité la famille $\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^6}+n^6a_n^2\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable, ainsi par le critère de comparaison, $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable, par suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

• $\forall n\in\mathbb{Z}^*,\ |na_n| = n|a_n| = \dfrac{1}{n^2}\times(n^3|a_n|) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^4}+n^6a_n^2\right)$. car $\forall a,b\in\mathbb{R},\ |ab|\leq\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

Comme les familles $(n^6a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\left(\dfrac{1}{n^4}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ sont sommables, par linéarité la famille

$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^8}+n^6a_n^2\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable, ainsi par le critère de comparaison, $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable, par suite $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

Corrigé de l'exercice № 4. Retour à l'énoncé

① Soit $x\in]-1,1[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, comme S_n est dérivable sur $]-1,1[$,

Alors

$$S_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}kx^{k-1}=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{(1-x)^2}$$

par suite $\sum_{n\geq 0}nx^{n-1}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{(1-x)^2}$.

② Montrons que la famille $\left(\frac{n+m}{2^{n+m}}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et somme vaut 8.

Pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}$, on pose $x_{n,m}=\frac{n+m}{2^{n+m}}\geq 0$.

• Soit $m\in\mathbb{N}$, fixé. Montrons que la série $\sum_{n\geq 0}x_{n,m}$ converge absolument.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n,m}=\frac{n+m}{2^{n+m}}=\frac{1}{2^m}\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^n+m\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Comme les séries $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n\geq 0}n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergent, alors la série $\sum_{n\geq 0}x_{n,m}$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}=\frac{1}{2^m}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n+m\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{2^m}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}+m\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{m+1}{2^{m-1}}$$

• Montrons que la série $\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}\right)$ converge.

Pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}=\frac{m+1}{2^{m-1}}=m\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$.

Comme les séries $\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$ et $\sum_{m\geq 0}m\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$ convergent, alors la série $\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}\right)$ converge, alors la famille $\left(\frac{n+m}{2^{n+m}}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et sa somme

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}x_{n,m} &= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{2^{m-1}}=\sum_{m=0}^{+\infty}m\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\\ &= \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}+2.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=8\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice № 5. Retour à l'énoncé

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$.

① Pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\frac{z}{n}\right| = \frac{|z|}{n} \leq \frac{|z|}{2} < 1$, alors la série géométrique $\sum_{k\geqslant 2}\left|\frac{z^k}{n^k}\right| = \sum_{k\geqslant 2}\left|\frac{z}{n}\right|^k$ est convergente, donc $\sum_{k\geqslant 2}\frac{z^k}{n^k}$ converge absolument et sa somme :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^k = \frac{\left(\frac{z}{n}\right)^2}{1-\left(\frac{z}{n}\right)} = \frac{z^2}{n(n-z)}$$

② On a sait que

$$\left(\frac{z^k}{n^k}\right)_{k,n\geqslant 2} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \geq 2,\ \sum_{k\geqslant 2}\frac{z^k}{n^k} \text{ converge absolument} \\ \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{z^k}{n^k}\right) \text{ converge absolument} \end{cases}$$

• D'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k\geqslant 2}\frac{z^k}{n^k}$ converge absolument et $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{z^k}{n^k} = \frac{z^2}{n(n-z)}$.

• On a $\frac{z^2}{n(n-z)} \underset{n\to+\infty}{\sim} z^2.\frac{1}{n^2}$, puisque la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ converge absolument,

Alors $\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{z^k}{n^k}\right) = \sum_{n\geq 2}\frac{z^2}{n(n-z)}$ converge absolument.

③ Comme $\left(\frac{z^k}{n^k}\right)_{k,n\geqslant 2}$ est sommable, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^2}{n(n-z)} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(z^k\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}\left(z^k\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}-1\right)\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(z^k\left(\zeta(k)-1\right)\right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1)z^k \end{aligned}$$

④ Pour $z = 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right) = 1 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice № 6. Retour à l'énoncé

① On a sait que

$$\left(\frac{x^p}{n^{p+1}}\right)_{n,p\geqslant 2} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n\geq 1,\ \displaystyle\sum_{p\geqslant 2}\frac{x^p}{n^{p+1}} \text{ converge absolument} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{n^{p+1}}\right) \text{ converge absolument}\end{cases}$$

- Pour tout $n\geq 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{p\geqslant 1}\left(\frac{x}{n}\right)^p$ converge absolument, car $\left|\frac{x}{n}\right|\leq |x|<1$ et

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^p=\frac{1}{n}\frac{\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}=\frac{x}{n(n-x)}$$

- On a $\displaystyle\frac{x}{n(n-x)}\underset{n\to+\infty}{\sim}x.\frac{1}{n^2}$, puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ converge absolument,

Alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{n^{p+1}}\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{x}{n(n-x)}$ converge absolument.

② Comme $\left(\dfrac{x^p}{n^{p+1}}\right)_{n,p\geqslant 1}$ est sommable, alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n-x)} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{n^{p+1}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^p}{n^{p+1}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(x^p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\right)\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}x^p\zeta(p+1)=\sum_{p=1}^{+\infty}\zeta(p+1)x^p\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice № 7. Retour à l'énoncé

① (a) Pour tout $n\geq 2$

$$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $x_n-x_{n-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n^2}$.

(b) On sait que

$$(x_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente} \iff \text{la série télescopique } \sum_{n\geq 2}(x_n-x_{n-1}) \text{ est convergente}$$

Comme $x_n-x_{n-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n^2}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et $-\dfrac{1}{2n^2}$ de signe constant, d'après le critère d'équivalence $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(x_n-x_{n-1})$ converge.

(c) Pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)+(\ln(n)-\ln(n+1))\\
&= x_n+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\gamma
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\gamma$.

② (a) On a sait que

$$\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{k,n\geq 2} \text{ est sommable} \iff \begin{cases}\forall n\geq 2,\ \sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{kn^k} \text{ converge absolument}\\ \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}\right) \text{ converge absolument}\end{cases}$$

• Pour tout $n \geq 2$, $\left|\frac{(-1)^k}{kn^k}\right| = \frac{1}{kn^k} \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{n}\right)^k$, puisque $\left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$, alors la série géométrique $\sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{n}\right)^k$ converge, par le critère de comparaison $\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{kn^k}$ converge absolument.

• Puisque la suite $\left(\frac{1}{kn^k}\right)_{k\geq 2}$ positive, décroissante et converge vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\left|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}\right| \leq \left|\frac{(-1)^2}{2n^2}\right| = \frac{1}{2n^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ converge, par le critère de comparaison, $\sum_{n\geq 2}\left(\left|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}\right|\right)$ converge, donc $\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)$ converge absolument.

(b) Montrons que $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)=\gamma$.

Comme $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{k,n\geq 2}$ est sommable, alors $\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}=\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}$.

Donc $\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$.

Par suite $\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}$ $(*)$.

• Simplifions $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}=\frac{(-1)^k}{k}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$$

• Simplifions $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}$.

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Car $\forall x \in]-1, 1[, \ \ln(x+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

D'après $(*)$, on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \gamma$$

Corrigé de l'exercice № 8. Retour à l'énoncé

① Montrons que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

• Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $(p,q) \in I_{p\times q}$ donc $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$.

• Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq m$, par l'absurde supposons que $I_n \cap I_m \neq \varnothing$.
Soi $(p,q) \in I_n \cap I_m$, alors $(p,q) \in I_n$ et $(p,q) \in I_m$, par suite $pq = n$ et $pq = m$, d'où $n = m$ ce qui est absurde.

Donc $\begin{cases} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \\ n \neq m \Longrightarrow I_n \cap I_m = \varnothing \end{cases}$ alors $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

② Soit $x > 2$

$$\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varphi(p)}{p^x}\right)\zeta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varphi(p)}{p^x} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^x} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\varphi(p)}{(pq)^x}$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{\varphi(p)}{(pq)^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{\varphi(p)}{n^x}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\left(\sum_{(p,q)\in I_n} \varphi(p)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ divise } n}}^{n} \varphi(p)\right)$$

car $(p,q) \in I_n \Longleftrightarrow p$ divise n

Puisque $\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ divise } n}}^{n} \varphi(p) = n$, alors $\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varphi(p)}{p^x}\right)\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \zeta(x-1)$.

Par suite $\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varphi(p)}{p^x}$.