Problème : Quelques sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est scalaire s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A = \alpha.I_n$.
- Pour $P = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k$.
- Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $\mathcal{A}$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si

$$\begin{cases} I_n \in \mathcal{A} \\ \forall A, B \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha A + B \in \mathcal{A} \\ \forall A, B \in \mathcal{A}, \quad A \times B \in \mathcal{A} \end{cases}$$

- $\mathbb{R}[A] = \{P(A); \quad P \in \mathbb{R}[X]\}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée par les polynômes en A.
- $D_n(\mathbb{R})$ désigne la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.
- Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{R}$-algèbres et $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, on dit que f est un morphisme d'algèbres si

$$\begin{cases} \forall a, b \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) \\ \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad f(a \times b) = f(a) \times f(b) \\ f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

Si de plus f est bijective, on parle d'un isomorphisme d'algèbres.

Partie №1 : Questions préliminaires

① Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice scalaire.
 (a) Montrer que $\mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_n)$.
 (b) Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un corps.

② Soit $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in D_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.
 (a) On considère l'application $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n))$.
 Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 (b) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \text{diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n))$.
 (c) Montrer que $\mathbb{R}[B] = D_n(\mathbb{R})$.

③ On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables telles que $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
 (a) Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$.
 On définit l'application $g : \mathbb{R}[A] \to \mathbb{R}[B]$ par $g(Q(A)) = P^{-1}Q(A)P$.
 (b) Montrer que g est un isomorphisme d'algèbres.
 (c) Énoncer le résultat ainsi démontré.

Partie №2 : Étude d'un exemple

Dans cette partie $n = 2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non scalaire.

① Montrer que $A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
② Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$.
③ Montrer que $\mathbb{R}[A]$ contient une matrice B telle que $B^2 = -I_2$ si et seulement si $(\text{Tr}(A))^2 < 4\det(A)$.

④ **Dans cette question on suppose que $(\text{Tr}(A))^2 < 4\det(A)$.**

Soit $B \in \mathbb{R}[A]$ telle que $B^2 = -I_2$.
 (a) Montrer que (I_2, B) est une base de $\mathbb{R}[A]$.

(b) On considère $f : \mathbb{R}[A] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire définie sur la base (I_2, B) par $f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$.
(i) Justifier sans calcul que f est bijective.
(ii) Montrer que f est un isomorphisme d'algèbres.
(c) En déduire que $\mathbb{R}[A]$ est un corps.

⑤ **Dans cette question on suppose que $(\mathbf{Tr}(A))^2 = 4\det(A)$.**

(a) Déterminer les matrices $M \in \mathbb{R}[A]$ telles que $M^2 = 0$.
(b) Conclure que $\mathbb{R}[A]$ n'est pas un corps.

⑥ **Dans cette question on suppose que $(\mathbf{Tr}(A))^2 > 4\det(A)$.**

(a) On considère la polynôme $P(X) = \det(X.I_2 - A)$, montrer que $P(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$.
(b) Soit λ_1, λ_2 les racines réelles de P et $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $AV_i = \lambda_i V_i$.
(i) Montrer que (V_1, V_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
(ii) En déduire que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
(d) En déduire que $\mathbb{R}[A]$ est isomorphe à $D_2(\mathbb{R})$.
(e) Est ce que $\mathbb{R}[A]$ est un corps ?

Partie №3 : Quelques propriétés d'une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie n.

• $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes d'espace vectoriel $\mathcal{A}$.

• $GL(\mathcal{A})$ désigne le groupe des automorphismes (endomorphismes bijectives) de $\mathcal{A}$.

• $\mathbb{U}(\mathcal{A})$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{A}, +, \times)$.

① Soit $a \in \mathcal{A}$, on considère l'application $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ définie par $f_a(x) = a \times x$.
(a) Montrer que $f_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
(b) On suppose que $\mathcal{A}$ est commutative, montrer que $f_a \in GL(\mathcal{A}) \iff a \in \mathbb{U}(\mathcal{A})$.
(c) A quelle condition sur a pour que f_a soit un morphisme d'algèbres.

② On considère $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{A}$ et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(a) = Mat_{\mathcal{B}}(f_a)$.
(a) Dans cette question seulement, $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{B} = (1, i)$ la base canonique de $\mathbb{C}$, déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(f_z)$.
(b) Montrer que f est un morphisme injectif d'algèbres.
(c) Vérifier que $f(\mathcal{A})$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(d) En déduire que $\mathcal{A}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

③ Énoncer le résultat ainsi démontré.

④ Dans cette question, $\mathcal{A}$ désigne une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(a) On suppose que $\mathcal{A}$ contient une matrice non scalaire M telle que $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ M - \lambda.I_n$ n'est pas inversible. Montrer que $\mathcal{A}$ ne peut pas être un corps.
(b) En déduire que $D_n(\mathbb{R})$ n'est pas un corps.
(c) On suppose que $\mathcal{A}$ est intègre.
(i) Soit $A \in \mathcal{A}$ une matrice non nulle, montrer que l'application $f_A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ définie par $f_A(X) = AX$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$.
(ii) En déduire que $\mathcal{A}$ est un corps.

*** Fin de l'énoncé ***

Partie №1 : Questions préliminaires

① Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice scalaire.

(a) Montrons que $\mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_n)$.

Comme A est une matrice scalaire, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda I_n$.

• Soit $M \in \mathbb{R}[A]$, alors il existe $P = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, tel que $M = P(A)$

comme $\forall k \in [\![0, r]\!], A^k = \alpha^k I_n$, alors $M = P(A) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k = \left(\sum_{k=0}^{r} \alpha_k \lambda^k\right) I_n = P(\lambda) I_n \in \text{vect}(I_n)$.

• Soit $M \in \text{vect}(I_n)$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}, M = \beta I_n = \beta A^0 = P(A) \in \mathbb{R}[A]$ où $P = \beta X^0 = \beta$.

On en déduit alors que $\mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_n)$.

(b) Montrons que $\mathbb{R}[A]$ est un corps.

• D'après l'énoncé $\mathbb{R}[A]$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathbb{R}[A]$ est un anneau.

• Montrons que $\mathbb{R}[A]$ est commutatif.

Soit $M, N \in \mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_n)$, alors $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tel que $M = \alpha I_n$ et $N = \beta I_n$

Donc $M \times N = \alpha\beta I_n = \beta\alpha I_n = N \times N$.

• Montrons que tout élément $M \in \mathbb{R}[A]$ non nul est inversible.

Soit $M \in \mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_n)$ non nul, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$, tel que $M = \alpha I_n$, comme $M \times \left(\frac{1}{\alpha} I_n\right) = I_n$, alors M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{\alpha} I_n$.

Donc $\mathbb{R}[A]$ est un corps.

② Soit $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in D_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

(a) On considère l'application $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n))$.

Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

• Montrons que f est linéaire.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(P + \alpha Q) &= ((P + \alpha Q)(\lambda_1), ..., (P + \alpha Q)(\lambda_1)) \\ &= (P(\lambda_1) + \alpha Q(\lambda_1), ..., P(\lambda_n) + \alpha Q(\lambda_n)) \\ &= (P(\lambda_1), ..., P(\lambda_n)) + \alpha(Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_n)) \\ &= f(P) + \alpha f(Q) \end{aligned}$$

• Montrons que f est bijective.

Comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = (n-1) + 1 = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que f est injective.

Soit $P \in \text{Ker}(f)$, alors $f(P) = (P(\lambda_1), ..., P(\lambda_n)) = (0, ..., 0)$, donc $P(\lambda_1) = ... = P(\lambda_n) = 0$

Donc P admet n racines deux à deux distincts, puisque $\deg(P) \leq n - 1$, alors $P = 0$, donc f est injective.

(b) Montrons que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \text{diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n))$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, comme $\forall k \in [\![0, r]\!], B^k = \text{diag}(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)$, alors

$$P(B) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k B^k = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k \text{diag}(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k) = \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{r} \alpha_k \lambda_1^k, ..., \sum_{k=0}^{r} \alpha_k \lambda_n^k\right) = \text{diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n))$$

(c) Montrons que $\mathbb{R}[B] = D_n(\mathbb{R})$.

• On a $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \text{diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n)) \in D_n(\mathbb{R})$, donc $\mathbb{R}[B] \subset D_n(\mathbb{R})$.

• Réciproquement, soit $M \in D_n(\mathbb{R})$, alors $\exists \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tel que $M = \text{diag}(\beta_1, ..., \beta_n)$

Comme $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est bijective et $(\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, tel que $f(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n)) = (\beta_1, ..., \beta_n)$, donc $M = \text{diag}(\beta_1, ..., \beta_n) = \text{diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n)) = P(B) \in \mathbb{R}[B]$

On en déduit alors que $\mathbb{R}[B] = D_n(\mathbb{R})$.

③ On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables telles que $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrons que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$.

Soit $Q = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k$.

Comme $B = P^{-1}AP$, alors $\forall k \in [\![0, r]\!], B^k = P^{-1}A^kP$ (récurrence sur k), donc

$$Q(B) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k B^k = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k\right)P = P^{-1}Q(A)P$$

On définit l'application $g : \mathbb{R}[A] \to \mathbb{R}[B]$ par $g(Q(A)) = P^{-1}Q(A)P$.

(b) Montrons que g est un isomorphisme d'algèbres.
Montrons g est un morphisme d'algèbres.
Soit $Q, H \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

•

$$\begin{aligned} g(\lambda Q(A) + H(A)) &= g((\lambda Q + H)(A)) = P^{-1}(\lambda Q + H)(B)P = P^{-1}(\lambda Q(B) + H(B))P \\ &= \lambda P^{-1}Q(B)P + P^{-1}H(B)P = \lambda g(Q(A)) + g(H(B)) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} g(Q(A) \times H(A)) &= g((Q \times H)(A) == P^{-1}(Q \times H)(B)P = P^{-1}Q(B)H(B)P \\ &= (P^{-1}Q(B)P)(P^{-1}H(B)P) = g(Q(A)) \times g(Q(B)) \end{aligned}$$

• Soit $Q = 1 = X^0$, donc $Q(A) = Q(B) = I_n$, ainsi $g(I_n) = g(Q(A)) = P^{-1}Q(B)P = P^{-1}P = I_n$.
Ainsi g est un morphisme d'algèbre.
Montrons g est bijective.
Il est clair que g est surjective, montrons qu'elle est injective.
Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, $g(Q(A)) = 0 \iff P^{-1}Q(A)P = 0 \iff P(P^{-1}Q(A)P)P^{-1} = 0 \iff Q(A) = 0$
Donc g est bijective, par suite g est un isomorphisme d'algèbres.
(c) Si les matrices A et B sont semblables, alors les algèbres $\mathbb{R}[A]$ et $\mathbb{R}[B]$ sont isomorphes.

Partie №2 : Étude d'un exemple

Dans cette partie $n = 2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non scalaire.

① Montrer que $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Tr}(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$ et $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$, donc

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

② Montrons que (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$.
• Montrons que (I_2, A) est libre.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha I_2 + \beta A = 0$
Si $\beta \neq 0$, alors $A = -\frac{\alpha}{\beta}I_2$, donc A est une matrice scalaire, ce qui est absurde, donc $\beta = 0$, ainsi $\alpha I_2 = 0$, d'où $\alpha = 0$ car $I_2 \neq 0$.
Alors $\alpha = \beta = 0$, donc la famille (I_2, A) est libre.
• Montrons que (I_2, A) est génératrice de $\mathbb{R}[A]$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, par la division euclidienne de P par $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A))Q + R$ et $\det(R) < 2$.
Donc $P(A) = R(A)$, car $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
Puisque $\deg(R) < 2$, alors $\exists a, b \in \mathbb{R}$, tel que $R = a + bX$, ainsi $P(A) = aI_2 + bA \in \mathrm{vect}(I_2, A)$, donc la famille (I_2, A) est génératrice de $\mathbb{R}[A]$.
Par suite (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$.

③ Montrons que $\mathbb{R}[A]$ contient une matrice B telle que $B^2 = -I_2$ si et seulement si $(\mathrm{Tr}(A))^2 < 4\det(A)$.
Soit $B \in \mathbb{R}[A]$, comme (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$ alors $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $B = \alpha I_2 + \beta A$, donc

$$B^2 = \alpha^2 I_2 + 2\alpha\beta A + \beta^2 A^2 = \alpha^2 I_2 + 2\alpha\beta A + \beta(\mathrm{Tr}(A)A - \det(A)I_2) = (\alpha^2 - \beta^2 \det(A))I_2 + (2\alpha\beta + \beta^2\mathrm{Tr}(A))A$$

Puisque la famille (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$, alors

$$\begin{aligned}
B^2 = -I_2 &\iff (\alpha^2 - \beta^2 \det(A))I_2 + (2\alpha\beta + \beta^2 \mathrm{Tr}(A))A = -I_2 \\
&\iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \det(A) = -1 \\ 2\alpha\beta + \beta^2 \mathrm{Tr}(A) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \det(A) = -1 \\ 2\alpha + \beta \mathrm{Tr}(A) = 0 \ \ (\beta \neq 0 \text{ car } A \text{ n'est pas scalaire}) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \det(A) = -1 \\ \alpha = -\frac{\beta \mathrm{Tr}(A)}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \beta^2 \left(\frac{(\mathrm{Tr}(A))^2}{4} - \det(A) \right) = -1 \\ \alpha = -\frac{\beta \mathrm{Tr}(A)}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}[A] \text{ contient une matrice } B \text{ telle que } B^2 = -I_2 &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ B = \alpha I_2 + \beta A \text{ et } B^2 = -I_2 \\
& \ \text{(d'après ce qui précède,)} \\
&\iff \frac{\mathrm{Tr}(A)^2}{4} - \det(A) < 0 \\
&\iff (\mathrm{Tr}(A))^2 < 4\det(A)
\end{aligned}$$

④ **Dans cette question on suppose que $(\mathbf{Tr}(A))^2 < 4\det(A)$.**

Soit $B \in \mathbb{R}[A]$ telle que $B^2 = -I_2$.
(a) Montrons que (I_2, B) est une base de $\mathbb{R}[A]$.
Comme $\dim(\mathbb{R}[A]) = 2$, car (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$, il suffit de montre que (I_2, B) est libre.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha I_2 + \beta B = 0$
Si $\beta \neq 0$, alors $B = -\frac{\alpha}{\beta} I_2$, par suite $-I_2 = B^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} I_2$, d'où $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = -1$ ce qui est absurde, puisque $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\frac{\alpha^2}{\beta^2} \geq 0$.
Ainsi $\beta = 0$, par suite $\alpha = 0$.

(b) On considère $f : \mathbb{R}[A] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire définie sur la base (I_2, B) par $f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$.
(i) Puisque $f : \mathbb{R}[A] \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire et elle transforme une base (I_2, B) de $\mathbb{R}[A]$ en une base $(f(I_2), f(B)) = (1, i)$ de $\mathbb{C}$, alors f est bijective.

(ii) Montrons que f est un isomorphisme d'algèbres.
Comme f est linéaire et bijective et $f(I_2) = 1$, il reste à prouver que $\forall M, N \in \mathbb{R}[A],\ f(M \times N) = f(M) \times f(N)$.
Soit $M, N \in \mathbb{R}[A]$, comme (I_2, B) est une base de $\mathbb{R}[A]$, alors $\exists (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M = aI_2 + bB$ et $N = cI_2 + dB$
Donc $M \times N = acI_2 + (ad + bc)B + bdB^2 = (ac - bd)I_2 + (ad + bc)B$, comme f est linéaire, alors $f(M \times N) = (ac - bd)f(I_2) + (ad + bc)f(B) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
D'autre part $f(M) \times f(M) = (af(I_2) + bf(B)) \times (cf(I_2) + df(B)) = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
Ainsi $f(M \times N) = f(M) \times f(N)$.

(c) Montrons que $\mathbb{R}[A]$ est un corps.
Puisque $f : \mathbb{R}[A] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un isomorphisme d'algèbres, alors c'est un isomorphisme d'anneaux, puisque l'anneau $\mathbb{C}$ est un corps, alors $\mathbb{R}[A]$ est un corps.

⑤ **Dans cette question on suppose que $(\mathbf{Tr}(A))^2 = 4\det(A)$.** dans ce cas B n'existe pas !?

(a) Déterminons les matrices $M \in \mathbb{R}[A]$ telles que $M^2 = 0$.
Soit $M \in \mathbb{R}[A]$, comme (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$, alors $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \alpha I_2 + \beta A$,
donc $M^2 = (\alpha^2 - \beta^2 \det(A))I_2 + (2\alpha\beta + \beta^2 \mathrm{Tr}(A))A = (\alpha^2 - \frac{\beta^2 (\mathrm{Tr}(A))^2}{4})I_2 + (2\alpha\beta + \beta^2 \mathrm{Tr}(A))A$.

Comme (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$, alors

$$\begin{aligned} M^2 = 0 &\iff (\alpha^2 - \frac{\beta^2(\mathrm{Tr}(A))^2}{4})I_2 + (2\alpha\beta + \beta^2\mathrm{Tr}(A))A = 0 \\ &\iff \begin{cases} \alpha^2 - \frac{\beta^2(\mathrm{Tr}(A))^2}{4} = 0 \\ 2\alpha\beta + \beta^2\mathrm{Tr}(A) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\beta = 0$, alors $\alpha = 0$, donc $M = 0$.
Si $\beta \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} M^2 = 0 &\iff \begin{cases} \alpha^2 - \frac{\beta^2(\mathrm{Tr}(A))^2}{4} = 0 \\ 2\alpha + \beta\mathrm{Tr}(A) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha^2 - \frac{\beta^2(\mathrm{Tr}(A))^2}{4} = 0 \\ \alpha = -\frac{\beta\mathrm{Tr}(A)}{2} \end{cases} \\ &\iff \alpha = -\frac{\beta\mathrm{Tr}(A)}{2} \end{aligned}$$

On conclut alors que les matrices $M \in \mathbb{R}[A]$ telles que $M^2 = 0$ sont de la forme $-\frac{\beta\mathrm{Tr}(A)}{2}I_2 + \beta A$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.
(b) D'après la question précédente, $\exists M \in \mathbb{R}[A]$ non nul tel que $M \times M = 0$, donc M n'est pas inversible, par suite $\mathbb{R}[A]$ n'est pas un corps.

⑥ Dans cette question on suppose que $(\mathrm{Tr}(A))^2 > 4\det(A)$.

(a) On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$P(X) = \det(X.I_2 - A) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$$

(b) Soit λ_1, λ_2 les racines réelles de P et $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $AV_i = \lambda_i V_i$.
(i) Montrons que (V_1, V_2) est une base $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha V_1 + \beta V_2 = 0$.
Comme $\alpha V_1 + \beta V_2 = 0$, alors $A(\alpha V_1 + \beta V_2) = 0$, donc $\alpha AV_1 + \beta AV_2 = 0$, par suite $\alpha\lambda_1 V_1 + \beta\lambda_2 V_2 = 0$
Donc $\begin{cases} \alpha V_1 + \beta V_2 = 0 \\ \alpha\lambda_1 V_1 + \beta\lambda_2 V_2 = 0 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \alpha\lambda_1 V_1 + \beta\lambda_1 V_2 = 0 \\ \alpha\lambda_1 V_1 + \beta\lambda_2 V_2 = 0 \end{cases}$, ainsi $\beta(\lambda_1 - \lambda_2)V_2 = 0$
Puisque $V_2 \neq 0$ (car (V_1, V_2) est libre) et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ car le discriminant de P est strictement positif, alors $\beta = 0$, par suite $\alpha = 0$, car $V_1 \neq 0$.

(ii) Montrons que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
On considère $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A
On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = A$ où $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Mat}_{(V_1,V_2)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
D'après la formule de passage, on a $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base $\mathbb{B}_c$ à la base (V_1, V_2), donc A et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

(d) Puisque A et $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sont semblables.
alors d'après la question ③ (c) de la parie №1, $\mathbb{R}[A]$ est isomorphe à $\mathbb{R}[B]$
Comme $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, d'après la question ② (c) de la parie №1, on a $\mathbb{R}[B] = D_2(\mathbb{R})$, d'où le résultat.

(e) Comme $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D_2(\mathbb{R})$ non nulle et $M^2 = 0$, alors M n'est pas inversible dans l'anneau $D_2(\mathbb{R})$, par suite $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas un corps, ainsi $\mathbb{R}[A]$ ne l'est pas.

Partie №3 : Quelques propriétés d'une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

① Soit $a \in \mathcal{A}$, on considère l'application $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ définie par $f_a(x) = a \times x$.
(a) Montrons que $f_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
Soit $x, y \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f_a(\alpha.x + y) = a \times (\alpha.x + y) = a \times (\alpha.x) + a \times y = \alpha.(a \times x) + a \times y = \alpha.f_a(x) + f_a(y)$.

(b) On suppose que $\mathcal{A}$ est commutative, montrons que $f_a \in GL(\mathcal{A}) \iff a \in \mathbb{U}(\mathcal{A})$.
$\Longrightarrow$ On a $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ et $f_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est bijective, alors $\exists! x \in \mathcal{A}$ tel que $f_a(x) = 1$, donc $x \times a = a \times x = 1_{\mathcal{A}}$, alors a est inversible.
$\Longleftarrow$ Si a est inversible, alors $\forall x \in \mathcal{A}$, $f_a \circ f_{a^{-1}}(x) = f_a(a^{-1} \times x) = a \times (a^{-1} \times x) = (a^{-1} \times a) \times x = x = Id_{\mathcal{A}}(x)$, donc $f_a \circ f_{a^{-1}} = Id_{\mathcal{A}}$, de même $f_{a^{-1}} \circ f_a = Id_{\mathcal{A}}$, donc f_a est bijective et $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$.

(c) Si f_a est un morphisme d'algèbres, alors $f_a(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}}$, donc $a = 1_{\mathcal{A}}$
Réciproquement, si $a = 1_{\mathcal{A}}$, alors $f_a = Id_{\mathcal{A}}$ est un morphisme d'algèbres.

② On considère $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{A}$ et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(a) = Mat_{\mathcal{B}}(f_a)$.
(a) Dans cette question seulement, $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{B} = (1, i)$ la base canonique de $\mathbb{C}$, déterminons $Mat_{\mathcal{B}}(f_z)$.
Posons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, On a $f_z(1) = z = a + bi$ et $f_z(i) = z.i = -b + ai$, donc $Mat_{\mathcal{B}}(f_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

(b) Montrons que f est un morphisme injectif d'algèbres.
Soit $a, b \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
Il est clair que $f_{\lambda.a+b} = \lambda.f_a + f_b$ et $f_{a \times b} = f_a \circ f_b$ et $f_{1_{\mathcal{A}}} = Id_{\mathcal{B}}$.
• $f(\lambda.a + b) = Mat_{\mathcal{B}}(f_{\lambda.a+b}) = Mat_{\mathcal{B}}(\lambda.f_a + f_b) = \lambda.Mat_{\mathcal{B}}(f_a) + Mat_{\mathcal{B}}(f_b) = \lambda.f(a) + f(b)$.
• $f(a \times b) = Mat_{\mathcal{B}}(f_{a \times b}) = Mat_{\mathcal{B}}(f_a \circ f_b) = Mat_{\mathcal{B}}(f_a) \times Mat_{\mathcal{B}}(f_b) = f(a) \times f(b)$.
• $f(1_{\mathcal{A}}) = Mat_{\mathcal{B}}(f_{1_{\mathcal{A}}}) = Mat_{\mathcal{B}}(Id_{\mathcal{A}}) = I_n$.
Donc f est un morphisme d'algèbres.
• Montrons que f est injectif.
Soit $a \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(a) = 0$, d'où $Mat_{\mathcal{B}}(f_a) = 0$, donc $f_a = 0$, en particulier $f_a(1_{\mathcal{A}}) = 0$, donc $a = 0$, par suite f est injectif.

(c) Comme $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre et f est un morphisme d'algèbres, alors $f(\mathcal{A})$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Comme $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un morphisme d'algèbres injectif, alors $f : \mathcal{A} \longrightarrow f(\mathcal{A})$ est un isomorphisme d'algèbres, donc $\mathcal{A}$ est isomorphe à $f(\mathcal{A})$ qui est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

③ Toute algèbre de dimension finie n est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

④ Dans cette question, $\mathcal{A}$ désigne une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(a) Comme $M - \lambda.I_n \neq 0$ car M n'est pas une matrice scalaire, puisqu'elle n'est pas inversible, alors $\mathcal{A}$ ne peut pas être un corps.

(b) Pour $M = \mathrm{diag}(2, 1, ..., 1) \in D_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = 1$, M n'est une matrice scalaire et $M - \lambda I_n = \mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)$ n'est pas inversible, d'après la question précédente $D_n(\mathbb{R})$ n'est pas un corps.

(c) On suppose que $\mathcal{A}$ est intègre.
(i) Soit $A \in \mathcal{A}$ une matrice non nulle, montrer que l'application $f_A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ définie par $f_A(X) = AX$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$.
D'après la question la question ①, du partie №3, on a f_A est un endomorphisme de $\mathcal{A}$.
Comme $\mathcal{A}$ est de dimension finie, il suffit de montrer que f_A est injective.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(f_A)$, alors $f_A(X) = 0$, donc $AX = 0$, comme $\mathcal{A}$ est intègre et $A \neq 0$, alors $X = 0$, d'où f_A est injective.

(ii) Comme l'algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, \ .\ )$ est intègre, alors $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
(par définition $\mathcal{A}$ est intègre s'elle est commutative et ....) Il suffit alors de montrer que tout élément non nul A de $\mathcal{A}$ est inversible.
Comme A est non nulle, alors f_A est bijective, par suite $\exists X \in \mathcal{A}$, tel que $f_A(X) = I_n$, d'où $AX = I_n$, ainsi A est inversible, d'où $\mathcal{A}$ est un corps.

*** Fin ***