Problème : Formule d'Euler

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Objectifs : On se propose de montrer la formule d'Euler suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \pi cotan(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

Partie 1 : Étude d'une fonction

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k(x) = \frac{2x}{x^2-k^2}$.

① **Montrer que $\sum_{k\geq 1} f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.**

On définit alors la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

② **Dans cette question, on se propose de montrer que f est 1-périodique.**

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2 - k^2}$.

(a) **Montrer que $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.**

(b) **Montrer que $S_n(x+1) - S_n(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n}$.**

(c) **En déduire que f est 1-périodique et impaire. Quelle est la valeur de $f(\frac{1}{2})$.**

Du fait de la périodicité, il suffit donc d'étudier la fonction f sur $]0,1[$.

③ **Dans cette question, on se propose de montrer que f est de classe C^1 sur $]0,1[$.**

(a) **Montrer que $\sum_{k\geq 2} f_k$ et $\sum_{k\geq 2} f_k^{'}$ convergent normalement sur $]0,1[$.**

(b) **Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,1[$.**

(c) **En déduire que f est strictement décroissant sur $]0,1[$.**

④ **Équivalence de f en 0^+ et 1^-.**

(a) **Montrer que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$. En déduire les limites à droite et à gauche de 0.**

(b) **Montrer que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}$. En déduire les limites à droite et à gauche de 1.**

⑤ **Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $]0,1[$.**

Partie 2 : Formule d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on note $g(x) = \pi cotan(\pi x)$ et $h(x) = g(x) - f(x)$.

① **Vérifier que la fonction h est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue, impaire, et qu'elle est 1-périodique.**

② **(a) Montrer que** $\forall x \in]0,1[, g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = 2g(x)$.

(b) Montrer que $\forall x \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(\frac{x}{2}) + S_n(\frac{x+1}{2}) = 2S_n(x) + \frac{2}{x+2n+1}$.

(c) En déduire que pour tout $x \in]0,1[, f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x)$.

③ **(a) Détérminer un équivalent en** 0 **de** $\pi cotan(\pi x) - \frac{1}{x}$.

(b) En utilisant le théorème de double limite, montrer que $h(x) \underset{x \to 0}{\to} 0$.
En déduire que h **est prolongeable par continuité sur** $\mathbb{R}$. **On notera** h **ce prolongement sur** $\mathbb{R}$.

④ **(a) Montrer que** h **possède un maximum** M **sur** $[0,1]$. **On note** $M = h(x_0)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1], h(\frac{x}{2}) + h(\frac{x+1}{2}) = 2h(x)$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, M = h(\frac{x_0}{2^n})$.

(d) Montrer que $h(0) = M$. **En déduire que** h **est nulle sur** $\mathbb{R}$.

On a ainsi montré que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$**, on a:**

$$\pi cotan(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2} \quad \textbf{(Formule du à Euler)}$$

***** Fin de l'énoncé*****