......................$\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varepsilon\zeta\eta\theta\vartheta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi\pi\varpi\rho\varrho\sigma\varsigma\tau\upsilon\phi\varphi\chi\psi\omega$......................

Série d'exercices : Séries entières

Exercice № 1.

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

① $\sum\limits_{n\geq 1}\ln(n)z^n$, ② $\sum\limits_{n\geq 0}\cos(n)z^n$, ③ $\sum\limits_{n\geq 0}n^{(-1)^n}z^n$, ④ $\sum\limits_{n\geq 0}\binom{2n}{n}z^{2n+1}$, ⑤ $\sum\limits_{n\geq 0}(\sqrt{n})^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$.

Exercice № 2.

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{\cos(n\theta)}{n!}z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{\sin(n\theta)}{n!}z^n$, où θ est un réel fixé.

Exercice № 3.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-1}{n+2}x^n$$

Exercice № 4.

① On note respectivement R, R_P et R_I les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0}a_nz^n$, $\sum\limits_{n\geq 0}a_{2n}z^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0}a_{2n+1}z^{2n+1}$. Montrer que $R=\min(R_P,R_I)$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}z^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$

② Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$ avec $\begin{cases}a_{2n}=4^n\\ a_{2n+1}=5^{n+1}\end{cases}$

Exercice № 5.

Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que, pour tout entier $p\geq 2$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nz^{pn}$ est $R_p=\begin{cases}\sqrt[p]{R} & \text{si } R \text{ est fini}\\ +\infty & \text{si } R=+\infty\end{cases}$

(on dit que la série $\sum a_nz^{pn}$ est lacunaire).

Exercice № 6.

On pose pour tout $n\geq 1$, $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

① Montrer que $\sum_{n\geq 1} H_n z^n$ est de rayon 1. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} H_n z^n$ pour $|z|=1$.

② Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<1$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ (Penser à utiliser le produit de Cauchy).

Exercice № 7.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et f sa somme.

Montrer que si $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ converge absolument, alors f est bien définie et continue sur $[-R,R]$.

Exercice № 8.

On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n,\ x\in\mathbb{R}$.

① Déterminer I le domaine de définition de f.

② Montrer que f est continue sur $]-1,1]$.

③ Soit $x\in]-1,0[$. Calculer $f(-x^2)$, en déduire que $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$.

④ Soit $x\in]0,1[$. Calculer $f(x^2)$, en déduire que $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x})$.

⑤ En déduire que $\pi=4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice № 9. Théorème de Liouville

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et sa somme f.

① Montrer que pour tout $r\in]0,R[$ et $n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}dt$ (Formule de Cauchy)

② En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leq\frac{M(r)}{r^n}$ avec $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$.

③ En déduire que si $R=+\infty$ et f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante (Théorème de Liouville)

Exercice № 10.

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ de séries entières de rayon de convergence ≥ 1. On note respectivement f et g leur sommes.

On suppose que $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n>0$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ diverge.

① Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)=+\infty$.

② On suppose que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ (donc $a_n-b_n=\underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$).

(a) Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $x\in[0,1[$

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n\right|<\varepsilon\sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n$$

(b) En déduire que $f(x)\underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} g(x)$.

③ **Application:** on pose pour tout $n\geq 1$, $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}$

Exercice № 11. Extrait du CNC 2006

① Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle sur $]0,1]$.

② Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

③ Montrer que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0,1]$.

④ On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice № 12. Fonction zêta de Riemann

On rappelle que $\forall x > 1, \zeta(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$.

① Montrer que $\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.

② Préciser le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$.

③ On pose (lorsqu'il existe) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$.

(a) Montrer que le domaine de définition de f est $[-1,1[$.
(b) Montrer que f est continue sur $[-1,1[$ et de classe C^1 sur $]-1,1[$.

Exercice № 13.

On considère les fonctions f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

① Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

② On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Montrer que g se prolonge en une fonction continuité en 0 (notée encore g) en précisant $g(0)$, puis montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice № 14. Séries entières et équations différentielles

① Déterminer une solution développable en série entière des équation différentielle

$$2x(1+x)y'' + (5x+3)y' + y = 0$$

② Déterminer, en précisant leur rayon de convergence, les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$$

Exercice № 15. Développement en série entière

Montrer que la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de cette fonction.

Corrigé de l'exercice № 1.

① Déterminons le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \ln(n) z^n$.

Pour tout $n \geq 2$, $a_n = \ln(n) \neq 0$ et

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = \ell$$

Donc $R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} \ln(n) z^n\right) = \frac{1}{\ell} = 1$.

② Déterminons le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \cos(n) z^n$.

Comme $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 0} \cos(n) z^n\right) \geq 1$.

Or $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 0} \cos(n) z^n\right) \leq 1$.

On en déduit alors que $R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 0} \cos(n) z^n\right) = 1$.

③ Déterminons le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} z^n$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} \leq n^{(-1)^n} \leq n$, alors

$$R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} n z^n\right) \leq R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} z^n\right) \leq R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n\right)$$

Puisque $R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} n z^n\right) = R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n\right) = 1$, alors $R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} z^n\right) = 1$.

④ Déterminons le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $u_n(z) = \left|\binom{2n}{n} z^{2n+1}\right| = \binom{2n}{n} |z|^{2n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} |z|^{2n+1} > 0$.
On peut appliquer la règle d'Alembert pour les séries numériques :

$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} |z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4|z|^2$$

or $4|z|^2 < 1 \Longleftrightarrow |z| < \frac{1}{2}$, alors

- Si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $4|z|^2 < 1$, d'après la règle d'Alembert, $\sum_{n\geq 0} u_n(z)$ converge, par suite $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$ converge absolument, en particulier elle est convergente.
- Si $|z| > \frac{1}{2}$, alors $4|z|^2 > 1$, d'après la règle d'Alembert, $\sum_{n\geq 0} u_n(z)$ diverge grossièrement, par suite $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$ diverge grossièrement.

On en déduit alors que $R = \dfrac{1}{2}$.

⑤ Déterminons le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- Comme $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$, alors

$$R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n\right) = R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n\right) = 1$$

- Comme $\displaystyle\sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$, alors

$$R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n\right) = R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} z^n\right) = 1$$

On en déduit alors que $\displaystyle R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1$.

Corrigé de l'exercice № 2.

Remarquons que

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

Considérons alors la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où $a_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n!}$.

Comme $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ pour tout réel θ.

On déduit que les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\theta)}{n!} z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!} z^n$ ont aussi un rayon de convergence infini. Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\theta} z\right)^n}{n!} = e^{e^{i\theta} z}$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} z^n = \frac{e^{e^{i\theta} z} + e^{e^{-i\theta} z}}{2} = e^{z\cos(\theta)} \frac{e^{iz\sin(\theta)} + e^{-iz\sin(\theta)}}{2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} z^n = \frac{e^{e^{i\theta} z} - e^{e^{-i\theta} z}}{2i} = e^{z\cos(\theta)} \frac{e^{iz\sin(\theta)} - e^{-iz\sin(\theta)}}{2i}$$

Corrigé de l'exercice № 3.

Par le critère d'Alembert pour les séries entières cette série entière est de rayon de convergence vaut 1. Notons $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-1}{n+2}x^n$ sa somme pour tout $x\in]-1,1[$.

La fonction $g:x\mapsto x^2f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-1}{n+2}x^{n+2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ avec :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n-1)x^{n+1}=x^3\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}+x^2\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\
&= x^3\left(\frac{1}{1-x}\right)''+x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'-x\frac{1}{1-x}=\frac{2x^3}{(1-x)^3}+\frac{x^2}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\\
&= \frac{2x^3+x^2(1-x)-x(1-x)^2}{(1-x)^3}=\frac{3x^2-x}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{3x^2-x}{(1-x)^3}$, on en déduit que

$$g'(x)=\frac{3}{1-x}-\frac{5}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}$$

Par suite et

$$g(x)=-3\ln(1-x)-\frac{5}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+c$$

Puisque $g(0)=0=-4+c$. On a donc :

$$x^2f(x)=-3\ln(1-x)-\frac{5}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+4=\frac{x(4x-3)}{(1-x)^2}-3\ln(1-x)$$

Finalement

$$\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\},\quad f(x)=\frac{4x-3}{x(1-x)^2}-3\frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

Corrigé de l'exercice № 4.

① On note $\begin{cases} I=\{r\geq 0,\ \ (a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est bornée}\}\\ I_P=\{r\geq 0,\ \ (a_{2n}r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}\text{ est bornée}\}\\ I_I=\{r\geq 0,\ \ (a_{2n+1}r^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}\text{ est bornée}\}\end{cases}$

$$\begin{aligned}
r\in I &\iff (a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est bornée}\\
&\iff (a_{2n}r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}\ \text{ est bornée et }\ (a_{2n+1}r^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}\text{ est bornée}\\
&\iff r\in I_P\ \text{ est bornée et }\ r\in I_I\\
&\iff r\in I_P\cap I_I
\end{aligned}$$

Alors $I=I_P\cap I_I$, par suite

$$R=\sup(I)=\sup(I_P\cap I_I)=\min(\sup(I_P),\sup(I_I))=\min(R_P,R_I)$$

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$.

Comme $\sum_{n\geq 00}^{+\infty}a_nz^n$ est absolument convergente, alors la suite $(a_nz^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, par une sommation par paquets, on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}z^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$$

②

▶ **Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} 4^n z^{2n}$.**

On a $\dfrac{|4^{n+1}z^{2n+2}|}{|4^n z^{2n}|} = 4|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4|z|^2$, donc $R_P = \dfrac{1}{2}$.

▶ **Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} 5^{n+1} z^{2n+1}$.**

On a $\dfrac{|5^{n+2}z^{2n+3}|}{|5^{n+1} z^{2n+1}|} = 5|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5|z|^2$, donc $R_I = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

▶ On déduit alors que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence $R = \min\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

▶ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 5^{n+1} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (4z^2)^n + 5z \sum_{n=0}^{+\infty} (5z^2)^n = \frac{1}{1-4z^2} + \frac{5z}{1-5z^2}$$

Corrigé de l'exercice № 5.

▶ Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z^n$ converge, en particulier $\sum a_n z^{pn} = \sum a_n (z^p)^n$ est convergente, donc $R_p = +\infty$.

▶ Si R est fini.

- Si $|z| < \sqrt[p]{R}$, alors $|z^p| < R$, donc $\sum a_n z^{pn} = \sum a_n (z^p)^n$ converge absolument.
- Si $|z| > \sqrt[p]{R}$, alors $|z^p| > R$, donc $\sum a_n z^{pn} = \sum a_n (z^p)^n$ diverge grossièrement.

On en conclut alors que $R_p = \sqrt[p]{R}$.

Corrigé de l'exercice № 6.

Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge et à termes positifs, alors $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

①

▶ Montrons que $\sum\limits_{n\geq 1} H_n z^n$ est de rayon 1.

Pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{|H_{n+1}|}{|H_n|} = \frac{H_{n+1}}{H_n} = \frac{H_n + \frac{1}{n+1}}{H_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)H_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = \ell$$

Donc $R = \dfrac{1}{\ell} = 1$.

▶ Étudions la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} H_n z^n$ pour $|z| = 1$.

On a $|H_n z^n| = H_n |z|^n = H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc $H_n z^n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, par suite $\sum\limits_{n\geq 1} H_n z^n$ diverge grossièrement.

② On a $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$ avec $\forall n \geq 1, a_n = \dfrac{1}{n}$ et $\forall n \geq 0, b_n = 1$. Ainsi $\sum\limits_{n\geq 1} H_n x^n$ est le produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} x^n$.

Or $R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n\right) = R_{\text{cv}}\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = (-\ln(1-x))\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

Corrigé de l'exercice № 7.

▶ Montrons que f est bien définie sur $[-R, R]$.

Soit $x \in [-R, R]$,

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n|R^n = |a_n R^n|$$

Comme $\sum a_n R^n$ converge absolument, donc $\sum |a_n R^n|$ converge, par la règle de comparaison, on en déduit que $\sum |a_n z^n|$ converge, d'où $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, e, particulier elle est convergente.

Ainsi f est bien définie sur $[-R, R]$.

▶ Montrons que f est continue sur $[-R, R]$.

Nous allons appliquer le théorème de continuité pour les séries de fonctions.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-R, R]$, on pose $f_n(x) = a_n x^n$

- **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[-R, R]$.**
- **Montrons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[-R, R]$.**

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &= \sup_{x\in[-R,R]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-R,R]} |a_n x^n| = \sup_{x\in[-R,R]} |a_n||x|^n = |a_n| \sup_{x\in[-R,R]} |x|^n \\ &= |a_n|R^n = |a_n R^n| \end{aligned}$$

  Comme $\sum a_n R^n$ converge absolument, alors $\sum ||f_n||_\infty = \sum |a_n R^n|$ est convergente, d'où $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-R, R]$,

D'après le théorème de continuité, on en déduit que f est continue $[-R, R]$.

Corrigé de l'exercice № 8.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

① Déterminons I le domaine de définition de f.

▶ On a $\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|} = \frac{2n+1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = \ell$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$ est 1.

▶ Pour $x = 1$, la série alternée $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.

- Pour $x=-1$, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}$ est divergente, car $\frac{1}{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$.

On en conclut alors que $I=]-1,1]$.
② Montrons que f est continue sur $]-1,1]$.

- Comme f est la somme d'une série entière de rayon 1, alors elle est continue sur $]-1,1[$.

- **Montrons que f est continue en 1**
  Nous allons appliquer le théorème de continuité en un point pour les séries de fonctions.
  Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in I$, on pose $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$.

  - **Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en 1.**
  - **Montrons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur un voisinage de 1 dans I.**
    On a $[0,1]$ est un voisinage de 1 dans I.
    Pour tout $x\in[0,1]$, $\left(\frac{1}{2n+1}x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et converge vers 0
    Alors la série alternée $\sum_{n\geq 0} f_n(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$ est convergente et de plus

$$\forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N},|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n\right|\leq\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}x^{n+1}\right|=\frac{1}{2n+3}x^{n+1}\leq\frac{1}{2n+3}$$

    Or la majoration est indépendante de x et converge vers 0, alors la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

  D'après le théorème de continuité en un point pour les séries de fonctions, on en déduit que f est continue en 1

On en conclut alors que f est continue sur I.
③ Soit $x\in]-1,0[$.

- Calculons $f(-x^2)$.
  On a $f(-x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$, donc

$$\begin{aligned} xf(-x^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n}\\ &= -\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right)\end{aligned}$$

  Alors $f(-x^2)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

- Déduisons que $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$.
  On a $f(x)=f\left(-(\sqrt{-x})^2\right)=\frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$.

④ Soit $x\in]0,1[$.

► Calculons $f(x^2)$.

On a $f(x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$,

Donc $xf(x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan(x)$, alors $f(x^2)=\frac{\arctan(x)}{x}$.

► Déduisons que $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x})$.

On a $f(x)=f\left((\sqrt{x})^2\right)=\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

⑤ Déduisons que $\pi=4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Comme f est continue en 1 et $\forall x\in]0,1[, f(x)=\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Par passage à la limite, quand x tend vers 1^-, on en déduit que $f(1)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$,

par suite $\frac{\pi}{4}=f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice № 9.

① Soit $r\in]0,R[$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $\int_0^{2\pi}f(re^{it})e^{-int}dt=\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}a_kr^ke^{i(k-n)t}dt$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,2\pi]$, on pose $f_k(t)=a_kr^ke^{i(k-n)t}$

► **$\forall k\in\mathbb{N}$, f_k est continue sur $[0,2\pi]$.**

► **Vérifions que $\sum_{k\geq 0}f_k$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$.**

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $||f_k||_\infty=\sup_{t\in[0,2\pi]}|f_k(t)|=|a_k|r^k$, puisque $r\in]0,R[$, alors la série $\sum_{n\geq 0}a_nr^n$ converge absolument, donc $\sum_{k\geq 0}||f_k||_\infty$ converge, ainsi $\sum_{k\geq 0}f_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0,2\pi]$.

D'après le théorème d'intégration sur un segment, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f(re^{it})e^{-int}dt &= \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}a_kr^ke^{i(k-n)t}dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}a_kr^ke^{i(k-n)t}dt\\ &= 2\pi a_nr^n+\sum_{\substack{n=0\\k\neq n}}^{+\infty}\int_0^{2\pi}a_kr^ke^{i(k-n)t}dt\\ &= 2\pi a_nr^n+\sum_{\substack{n=0\\k\neq n}}^{+\infty}a_kr^k\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{i(k-n)t}dt}_{=0}=2\pi a_nr^n\end{aligned}$$

il s'ensuit que $a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(re^{it})e^{-int}dt$

② D'après la question précédente, on a
$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$, donc

$$|a_n| \;=\; \left|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})e^{-int}|dt = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt$$

Puisque pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|re^{it}| = r$, alors $|f(re^{it})| \leq M(r)$, donc

$$|a_n| \;\leq\; \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} M(r)dt = \frac{M(r)}{r^n}$$

③ Comme $R = +\infty$, alors la fonction f est bien définie sur $\mathbb{C}$, Or f est bornée, il existe $M > 0$, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$, donc pour tout $r \in]0, +\infty[$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)| \leq M$, d'après la question précédente, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]0, +\infty[$, $0 \leq |a_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n} \leq \dfrac{M}{r^n}$.
Comme $\forall n \geq 1$, $\dfrac{M}{r^n} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $a_n = 0$, ainsi $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a_0$,
par suite f est constante sur $\mathbb{C}$.

Corrigé de l'exercice № 10.

① Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = +\infty$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geq 0$, alors $\forall x \in [0, 1[$, $b_n x^n \geq 0$, donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

Or $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est croissante sur $[0, 1[$, donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1.

En faisant tendre x vers 1 par valeurs inférieurs, on déduit que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n \leq \ell$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient que $+\infty \leq \ell$, donc $\ell = +\infty$.

(Rappelons que, si $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$,

Dans ce ces $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \lim_{\substack{x<1\\ x\to 1}}(b_n x^n)$ diverge, donc on ne peut pas appliquer le théorème de double limite).

② On suppose que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ (donc $a_n - b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$).

(a) Soit $\varepsilon > 0$, comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $a_n - b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$,

Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N, |a_n - b_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}|b_n| = \dfrac{\varepsilon}{2}b_n$.

Soit $x \in [0, 1[$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(a_n - b_n)x^n\right| &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n - b_n||x^n| \\ &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2} b_n |x^n| = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n.\end{aligned}$$

(b) Montrons que $f(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} g(x)$.

Soit $x \in [0,1[$, on a $f(x)-g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n=\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-b_n)x^n+\sum_{n=N}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n$ Donc

$$\begin{aligned}
|f(x)-g(x)| &\leq \sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n+\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N}^{+\infty}b_nx^n \\
&\leq \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|}_{=M_N}+\frac{\varepsilon}{2}g(x)
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{M_N}{g(x)}=0$, $\exists\delta\in]0,1[$, tel que $\forall x\in[\delta,1[$ $\frac{M_N}{g(x)}<\frac{\varepsilon}{2}$, donc $M_N<\frac{\varepsilon}{2}g(x)$.
D'où pour tout $x\in[\delta,1[$,

$$|f(x)-g(x)|\leq M_N+\frac{\varepsilon}{2}g(x)<\varepsilon g(x)=\varepsilon|g(x)|$$

Ainsi $f(x)\underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim}g(x)$.

③ Application :

- Montrons que $H_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

  Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
k\leq t\leq k+1 &\implies \frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{k} \\
&\implies \int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dt\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt \\
&\implies \frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{k} \\
&\implies \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \\
&\implies \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq\int_1^n\frac{1}{t}dt\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \\
&\implies H_n-1\leq\ln(n)\leq H_n-\frac{1}{n} \\
&\implies \frac{1}{n}+\ln(n)\leq H_n\leq 1+\ln(n) \\
&\implies \frac{1}{n\ln(n)}+1\leq\frac{H_n}{\ln(n)}\leq\frac{1}{\ln(n)}+1
\end{aligned}$$

  Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln(n)}+1=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}+1=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{H_n}{\ln(n)}=1$, soit $H_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

- Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n\underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim}\frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

  Comme $H_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$, $\forall n\geq 1, \ln(n)\geq 0$ et $\sum_{n\geq 1}\ln(n)$ diverge, d'après la question ②, on a

$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$, selon l'exercice 4, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$,
d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

Corrigé de l'exercice № 11.

① Montrons que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle sur $]0,1]$.

La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$, (donc le problème se pose au voisinage de 0)
Comme $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, donc elle est prolongeable par continuité en 0, par suite elle intégrable sur $]0,1]$.

②

- Rayon de convergence et de la série entière $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$.

  Comme $\dfrac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|} = \dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = \ell$, alors $R = \dfrac{1}{\ell} = 1$.

- Somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$.

  On a sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

  Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$.

③ Montrons que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1]$, la suite $\left(\dfrac{x^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et converge vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$ converge et on a

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k+1}\right| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+2}\right| = \frac{x^{n+1}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

Comme la majoration est indépendante de x et converge vers 0, alors la converge est uniforme sur $[0,1]$.

④ Montrons alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \frac{\pi^2}{12}$.

D'après la question ②, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n+1}\right) dt$$

Nous allons appliquer le théorème d'intégration sur un segment (car $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n+1}$.

- **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$.**
- **D'après la question précédente, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.**

D'après le théorème d'intégration sur un segment, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n+1}\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n\frac{t^n}{n+1}dt\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ est absolument convergente (donc $\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable), par une sommation par paquets, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \quad (1)$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2}$ est absolument convergente (donc $\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable), par une sommation par paquets, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Corrigé de l'exercice № 12.

① Montrons que $\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Pour tout $p \geq 1$ et $x > 1$, on pose $f_p(x) = \dfrac{1}{p^x}$.

- On a $\forall p \geq 1$, $f_p(x) = p^{-x} = e^{-x\ln(p)}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_p(x) = l_p = \begin{cases}1 & \text{si } p=1\\ 0 & \text{si } p\geq 2\end{cases}$.
- **Montrons que $\sum\limits_{p\geq 1} f_p$ converge uniformément sur $[2,+\infty[$.**

  On a $[2,+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.

Pour tout $p \geq 1$, on a

$$||f_p||_\infty = \sup_{x\geq 2} |f_p(x)| = \sup_{x\geq 2} \frac{1}{p^x} = \frac{1}{p^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum\limits_{p\geq 1} ||f_p||_\infty = \sum\limits_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ converge, donc la série de fonctions $\sum\limits_{p\geq 1} f_p$ converge normalement (donc uniformément) sur $[2, +\infty[$

D'après le théorème de double limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p = 1$$

② Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$.

On a $\frac{\zeta(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $R_{\text{cv}}\left(\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\zeta(n)}{n} x^n\right) = R_{\text{cv}}\left(\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n} x^n\right) = 1$

③ (a) Montrer que le domaine de définition de f est $[-1, 1[$.

▶ Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$.

▶ Pour $x = 1$, $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\zeta(n)}{n}$ est divergente car $\frac{\zeta(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} frac1n$ diverge.

▶ Pour $x = -1$, $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}$ est convergente, il s'agit d'une série alternée puisque la suite $\left(\frac{\zeta(n)}{n}\right)_{n\geq 2}$ est positive décroissante et converge vers 0 (ζ est décroissante et $\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$).

On en déduit alors que le domaine de définition de f est $I = [-1, 1[$.

(b) Montrons que f est continue sur $[-1, 1[$ et de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

▶ Comme f est la somme d'une série entière de rayon 1, alors elle continue et de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

▶ Montrons f est continue en -1.

Nous allons appliquer le théorème de continuité en un point pour les séries de fonctions.

On a $\forall x \in [-1, 0]$, $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\zeta(n)}{n} (-x)^n\right)$.

- **Pour tout $n \geq 2$, $x \longmapsto (-1)^n \left(\frac{\zeta(n)}{n} (-x)^n\right)$ est continue en -1.**

- **Montrons que $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \left(\frac{\zeta(n)}{n} (-x)^n\right)$ converge uniformément sur $[-1, 0]$**

  On a $[-1, 0]$ est un voisinage de -1 dans $[-1, 1[$.

  Pour tout $x \in [-1, 0]$, la suite $\left(\frac{\zeta(n)}{n} (-x)^n\right)_{n\geq 2}$ est positive décroissante et converge vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \left(\frac{\zeta(n)}{n} (-x)^n\right)$ converge et on a :

  $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{\zeta(k)}{k} (-x)^k\right)\right| \leq \left|(-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n+1} (-x)^{n+1}\right| = \frac{\zeta(n+1)}{n+1} (-x)^{n+1} \leq \frac{\zeta(n+1)}{n+1}$$

  Or la majoration est indépendante de x et converge vers 0, alors la convergence est uniforme sur $[-1, 0]$

D'après le théorème de continuité, on en déduit que f est continue en -1, par suite elle est continue sur $[-1, 1[$.

Corrigé de l'exercice № 13.

① Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On sait que $\forall x\in\mathbb{R}, \cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, donc $1-\cos(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Donc, pour tout x **non nul**, $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$

Pour $x=0$, on a $f(0)=\frac{1}{2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{0^{2n}}{(2n+2)!}=\frac{1}{2}$.

On en déduit que pour tout réel x, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$.

Ainsi f est la somme d'une série entière de rayon $+\infty$, en particulier elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,+\infty[$.

Déterminons $f^{(n)}(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout réel x, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec $\begin{cases}a_{2n} & =\dfrac{(-1)^n}{(2n+2)!}\\ a_{2n+1} & =0\end{cases}$

On sait que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{f^n(0)}{n!}=a_n$, donc $f^{(n)}(0)=a_n\times n!$

Ainsi $\begin{cases}f^{(2n)}(0) & =\dfrac{(-1)^n}{(2n+2)!}\times(2n)!=\dfrac{(-1)^n}{(2n+2)(2n+1)}\\ f^{(2n+1)}(0) & =0\end{cases}$

② On considère la fonction $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par: $\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Montrons que g se prolonge en une fonction continuité en 0

On considère la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par: $\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0), donc

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=f(0)$$

Ainsi g est prolongeable en une fonction continue sur en 0 (notée encore g), par suite $g(0)=f(0)=\frac{1}{2}$.

Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On a $\forall t\in\mathbb{R}, f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+2)!}$

Donc

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad \int_0^x f(t)dt &= \int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+2)!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+2)!}dt\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!(2n+1)}x^{2n+1}\end{aligned}$$

Par suite, $\forall x\in\mathbb{R}^*, g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!(2n+1)}x^{2n}$.

Pour $x=0$, on a $g(0)=f(0)=\frac{1}{2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!(2n+1)}0^{2n}=\frac{1}{2}$

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!(2n+1)}x^{2n}$

Ainsi g est la somme d'une série entière de rayon $+\infty$, en particulier elle est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-\infty,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice № 14.

① Supposons qu'il existe une solution f de cette équation qui soit non identiquement nulle et développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ où $R\in[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ est *à* déterminer. Notons, pour tout $x\in]-R,R[$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

Sur $]-R,R[$, on a

$$\begin{cases} f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ f''(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)a_{n+1}x^{n-1} \\ xf'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n \\ xf''(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n \\ x^2f''(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n \end{cases}$$

Alors f est solution sur $]-R,R[$ si, et seulement si,

$$a_0+3a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2n(n+1)a_{n+1}+2n(n-1)a_n+5na_n+3(n+1)a_{n+1}+a_n\right)x^n=0$$

Soit

$$a_0+3a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)(2n+3)a_{n+1}+(n+1)(2n+1)a_n\right)x^n=0$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, on en déduit que

$$\begin{cases} a_0+3a_1=0 \\ \forall n\geq 1, (2n+3)a_{n+1}+(2n+1)a_n=0 \end{cases}$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\forall n\geq 0, a_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}a_0.$$

Soit :

$$f(x)=a_0\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n=\frac{a_0}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1}=a_0\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

② Supposons qu'il existe une solution f non identiquement nulle et développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ où $R\in]0,+\infty]\cup\{+\infty\}$ est à déterminer. Notons, pour tout $x\in]-R,R[$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

Sur $]-R,R[$, on a:

$$\begin{cases} f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ x f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\ x f''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n \end{cases}$$

Alors f est solution sur $]-R,R[$ si, et seulement si:

$$-2\left(a_0+a_1\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n(n+1)a_{n+1}+na_n-2(n+1)a_{n+1}-2a_n\right)x^n=0$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, on en déduit que

$$\begin{cases} a_1+a_0=0 \\ \forall n\geq 1, (n-2)\left((n+1)a_{n+1}+a_n\right)=0 \end{cases}$$

Cette équation est encore équivalente *à*

$$\begin{cases} a_1+a_0=0 \\ 2a_2+a_1=0 \\ \forall n\geq 3, a_{n+1}=-\dfrac{1}{(n+1)}a_n \end{cases}$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\begin{cases} a_1=-a_0 \\ a_2=\dfrac{a_0}{2} \\ \forall n\geq 3, a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}6a_3 \end{cases}$$

Soit

$$f(x)=a_0\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)-6a_3\left(\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)$$

où a_0 et a_3 sont deux constantes réelles. Le rayon de convergence de cette série étant égal *à* $+\infty$. On peut aussi écrire ces solutions sous la forme:

$$\begin{aligned} f(x)&=(a_0+6a_3)\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)-6a_3e^{-x} \\ &=\alpha\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)+\beta e^{-x} \end{aligned}$$

où α et β sont deux constantes réelles.

Corrigé de l'exercice № 15.

Les fonctions $x\mapsto\arcsin(x)$ et $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ étant développable en série entière sur $]-1,1[$, il en est de même du produit f. De la relation $\sqrt{1-x^2}f(x)=\arcsin(x)$, on déduit par dérivation (les fonctions considérées sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$) que:

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x)+\sqrt{1-x^2}f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ce qui se traduit en disant que f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\left\{\begin{array}{l} -xy+\left(1-x^2\right)y'=1 \\ y(0)=1 \end{array}\right.$$

En écrivant, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

on a :

$$\left\{\begin{array}{l} xf(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ x^2 f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+1}=\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n \end{array}\right.$$

et f est solution de cette équation différentielle si, et seulement si :

$$a_1+(2a_2-a_0)\,x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_{n-1}\right)x^n=1$$

soit

$$a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}-na_{n-1}\right)x^n=1$$

ce qui donne:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1=1 \\ \forall n\geq 1, (n+1)a_{n+1}-na_{n-1}=0 \end{array}\right.$$

avec $a_0=f(0)=0$. On a donc:

$$\forall p\geq 1, 2pa_{2p}=(2p-1)a_{2(p-1)}$$

avec $a_0=0$, ce donne $a_{2p}=0$ pour tout $p\geq 0$ (récurrence immédiate) et:

$$\forall n\geq 1, (2p+1)a_{2p+1}=2pa_{2p-1}$$

qui donne par récurrence:

$$a_{2p+1}=\frac{(2p)\cdot(2p-2)\cdot\cdots\cdot 2}{(2p+1)\cdot(2p-1)\cdot\cdots\cdot 3}a_1$$

avec $a_1=1$, soit :

$$a_{2p+1}=\frac{((2p)\cdot(2p-2)\cdot\cdots\cdot 2)^2}{(2p+1)!}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

pour tout $p\geq 0$. Le développement en série entière de f sur $]-1,1[$ est donc :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Le fait que f est impaire entraine que les coefficients a_{2n} sont tous nuls.