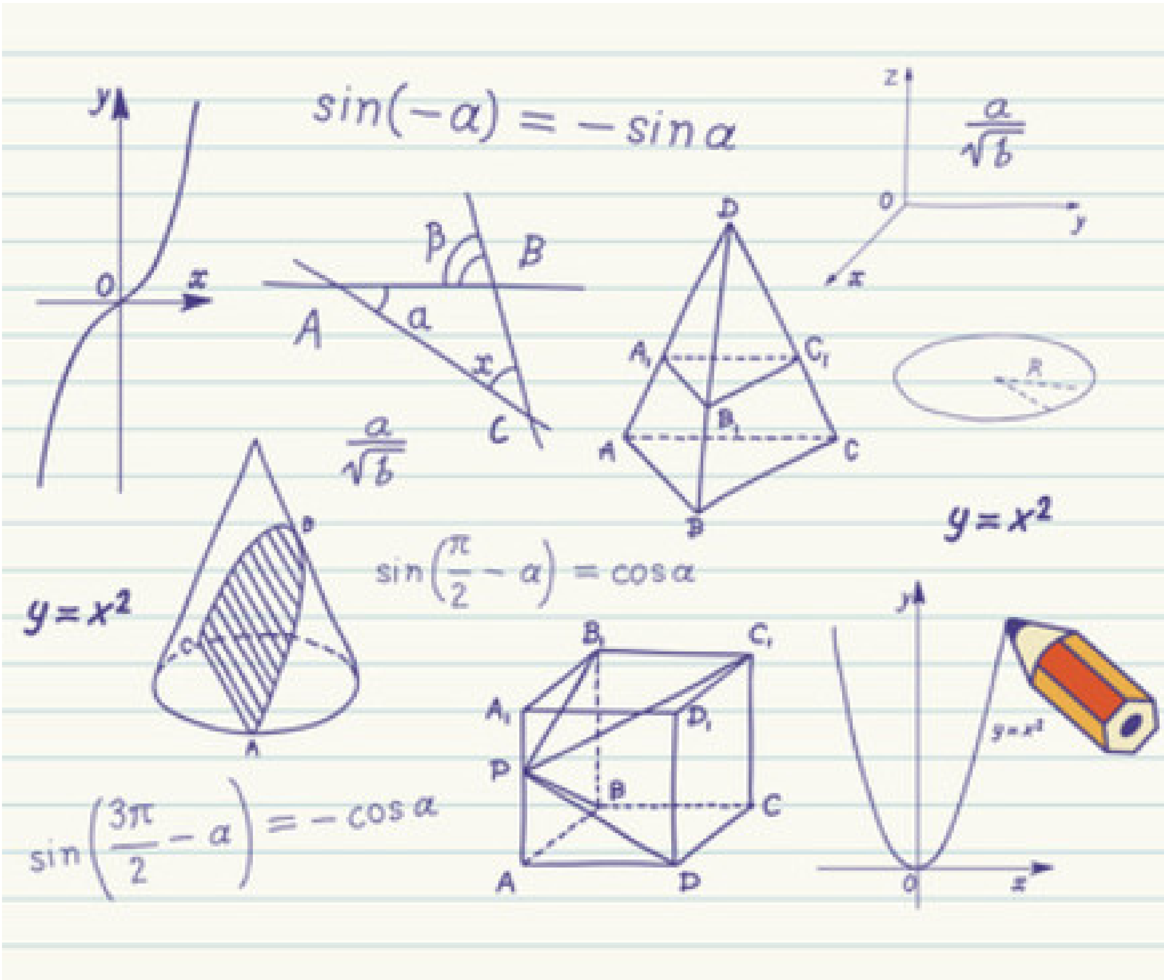
Intégrales généralisées



Auteur : ET-TAHRI Fouad
Professeur agrégé de Mathématiques à l'école Royale de l'Air
ettahrifouad1@gmail.com

—https://www.youtube.com/channel/UCWrHPjpNXZiGHqSw6hseiLw?view_as=subscriber—
—https://ettahrifouad1.wixsite.com/prepasmarrakech—

11 octobre 2021

Intégrales généralisées

Sommaire

Dans tout ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme :

- ▶ $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$,
- ▶ $I =]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$,
- ▶ $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

On fixe $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, dans ce cas $\displaystyle\int_I f(t)dt$ appelée intégrale généralisée.

Rappelons que lorsque $J = [c, d]$ est un segment de $\mathbb{R}$ (un intervalle fermé borné) et $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, l'intégrale $\displaystyle\int_c^d g(t)dt$ est bien définie.

I) Généralités

1) Définitions et exemples d'intégrales généralisées

Définition 1 (Intégrale généralisé).

- ▶ Si $I = [a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et finie, dans ce cas
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$
- ▶ Si $I =]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe et finie, dans ce cas
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$$
- ▶ Si $I =]a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes, dans ce cas
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemple L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge et vaut -1 ⊠

Solution
On a $t \longmapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$ (donc le problème se pose en 0), soit $x \in]0, 1]$
$\displaystyle\int_x^1 \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x \underset{x \to 0^+}{\to} -1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge et vaut -1 ⊠

Exercice 1
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} + \ln(t) - \frac{1}{t}\right) e^{-t}dt$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} + \ln(t) - \frac{1}{t}\right) e^{-t}dt = 0$

Solution
On a $f : t \longmapsto \left(\frac{1}{1-e^{-t}} + \ln(t) - \frac{1}{t}\right) e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (donc le problème se pose en 0 et $+\infty$)
Une primitive de f est $F : t \longmapsto \ln(1 - e^{-t}) - e^{-t}\ln(t)$.

- ▶ **Au voisinage de 0 :**
Soit $x \in]0, 1]$
$\displaystyle\int_x^1 f(t)dt = [F(t)]_x^1 = F(1) - F(x) = F(1) - \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) - x\ln(x)\frac{1-e^{-x}}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} F(1).$
Donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est convergente et vaut $F(1)$.

- **Au voisinage de $+\infty$:**
  Soit $x \in [1, +\infty[$
  $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = [F(t)]_1^x = F(x) - F(1) = \ln(1-e^{-x}) + e^{-x}\ln(x) - F(1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -F(1).$
  Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut $-F(1)$.

On en déduit alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = 0$ ⊠

Technique 1 (Intégrale généralisée et parité)**.**
Soit $0 < a \leq +\infty$ et $f :]-a, a[\longrightarrow +\infty$ continue par morceaux paire ou impaire, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt \text{ est convergente} \Longleftrightarrow \int_0^a f(t)dt \text{ est convergente}$$

En cas de convergence, on a
- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$

Exemple L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut π ⊠

Solution
On a $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$ (donc le problème se pose en -1 et 1), puisque $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est paire, il suffit d'étudier le problème au voisinage de 1
Au voisinage de 1 :
Soit $x \in [0, 1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin(t)]_0^x = \arcsin(x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.
On conclut alors que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$ ⊠

2) Intégrale des fonctions de référence usuelles

Proposition 1.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt \text{ converge} \Longleftrightarrow \lambda > 0$$

Avec $\forall \lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}.$

Remarque 1.
Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt \text{ converge} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) > 0$$

Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$ si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

Une famille importante d'intégrales généralisées est donnée par celle des intégrales de Riemann.

Proposition 2 (Intégrales de Riemann).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$. Avec $\forall \alpha \in]1, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$. Avec $\forall \alpha \in]-\infty, 1[$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

Remarque 2.

Pour $a < b$ et α dans $\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ $\left(\text{resp. } \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}\right)$ converge $\iff \alpha < 1$ avec :

$$\forall \alpha \in]-\infty, 1[, \quad \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}$$

Exemple L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge et vaut 2. ⊠

3) Opérations sur les intégrales généralisées

Proposition 3.

- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}dt$ et $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\, dt$ convergent et on a $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}dt = \overline{\int_a^b f(t)dt}$ et $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\, dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt$ diverge.

Remarque 3.

- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge, on ne peut rien dire sur la nature de $\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt$, comme le montre l'exemple des fonctions : $\left(f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{x}\right)$ et $\left(f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = -\frac{1}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergent, on ne peut rien dire sur la nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$, comme le montre l'exemple des fonctions : $\left(f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\left(f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$.

Corollaire 1.
Si f à valeurs complexes, alors

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge} \iff \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt \text{ et } \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt; \text{ sont convergentes}$$

En cas de convergence, on a :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$
- $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right)$
- $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt = \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right)$

Exercice 2
Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a > 0$, l'intégrale $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt)dt$ converge, en précisant sa valeur.

Solution
On a $t \longmapsto e^{-at}\cos(bt)$ est continue sur $[0, +\infty[$ (donc le problème est au voisinage de $+\infty$), on peut remarquer que $e^{-at}\cos(bt) = \mathrm{Re}(e^{-\lambda t})$ avec $\lambda = a - ib$.
Comme $Re(\lambda) = a > 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{\lambda}$, donc $I_{a,b}$ converge et

$$I_{a,b} = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} \boxtimes$$

Théorème 1 (Intégration par parties).

- Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(x)g(x) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \ell$ existe et finie. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{'}(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f^{'}(t)g(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{'}(t)dt = \ell - f(a)g(a) - \int_a^b f^{'}(t)g(t)dt$.
- Soit $f, g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1. On suppose que $f(x)g(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ existe et finie. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{'}(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f^{'}(t)g(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{'}(t)dt = f(b)g(b) - \ell - \int_a^b f^{'}(t)g(t)dt$
- Soit $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1. On suppose que $f(x)g(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x)g(x) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \ell^{'}$ existent et sont finies. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{'}(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f^{'}(t)g(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t)g^{'}(t)dt = \ell^{'} - \ell - \int_a^b f^{'}(t)g(t)dt$$

Technique 2.

Dans la pratique il est préférable d'effectuer une intégration parties sur l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ si le problème se pose seulement en b (ou $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ si le problème se pose seulement en a) puis en passant à la limite.

Exemple Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$ converge et calculer sa valeur $\boxtimes$

Solution
On a $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ est continue sur $]0, 1]$ (donc le problème se pose au voisinage de 0), soit $x \in]0, 1]$
$\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt = \int_x^1 \ln(t)\left(\frac{-1}{1+t}\right)^{'} dt$
Par une intégration par parties, on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt &= \left[\frac{-\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(1+t)}dt = \frac{\ln(x)}{1+x} + \int_x^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \frac{\ln(x)}{1+x} + [\ln(t) - \ln(t+1)]_x^1 = \frac{\ln(x)}{1+x} - \ln(2) - \ln(x) + \ln(x+1) \\
&= \frac{-x\ln(x)}{1+x} - \ln(2) - + \ln(x+1) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\ln(2).
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$ converge et vaut $-\ln(2)$ $\boxtimes$

Exercice 3 ($\Gamma(n+1) = n!$)
Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge et $I_n = n!$

Solution

On a $t \longmapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (donc le problème se pose au voisinage de $+\infty$).
Nous allons procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

▶ **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a I_0 converge et $I_0 = 1 = 0!$

▶ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et $I_n = n!$.

Montrons que $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et $I_{n+1} = (n+1)!$.

Soit $x \geq 0$, $\int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt = \int_0^x t^{n+1} (-e^{-t})' dt$, par une intégration par parties, on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt &= [t^{n+1}(-e^{-t})]_0^x + (n+1) \int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt \\
&= -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) \int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt \\
&\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} (n+1) I_n = (n+1)!
\end{aligned}$$

Donc I_{n+1} converge et $I_{n+1} = (n+1)!$

▶ **Récurrence terminée** ☒

Théorème 2 (Changement de variable).

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et $\varphi : J \longrightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors les intégrales $\int_I f(t) dt$ et $\int_J f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$ sont de même nature et en cas de convergence sont égaux.

Technique 3.

Dans la pratique, on effectue le changement de variable sur l'intégrale définie $\int_a^x f(t) dt$ si le problème se pose seulement en b (ou $\int_x^b f(t) dt$ si le problème se pose seulement en a) et on passe à la limite ensuite.

Exemple L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$ ☒

Solution

On rappelle que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2}$,
On a $f : t \longmapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{2}{e^{-t} + e^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (donc le problème se pose en $+\infty$), soit $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{dt}{ch(t)} &= 2 \int_0^x \frac{dt}{e^{-t} + e^t} = 2 \int_0^x \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dt \\
&\underset{u = e^t}{=} 2 \int_1^{e^x} \frac{du}{1 + u^2} = 2[\arctan(u)]_1^{e^x} \\
&= 2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan(e^x) \right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$ ☒

II) Intégrale généralisé d'une fonction positive

1) Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive

Théorème 3.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive sur I. On suppose que $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors

- $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- $\int_a^b f(t)dt = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in I,\ f(t) = 0$

Corollaire 2.

On suppose que $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est positive sur} I \\ \exists t_0 \in I, f(t_0) \neq 0 \text{ (f non nulle)} \end{cases} \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt > 0$$

Exemple $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt > 0$. (Intégrale de Wallis) ⊠

Exemple $\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt > 0$. (La fonction gamma d'Euler) ⊠

2) Critère de comparaison

Théorème 4 (Critère de comparaison)**.**

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant $0 \leq f(t) \leq g(t)$ au voisinage de b, alors

- $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge.
- $\int_a^b f(t)dt$ diverge $\Longrightarrow \int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt$. ⊠

Solution

$f : t \longmapsto \frac{e^{-t}}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et $\forall t \geq 0,\ \ 0 \leq f(t) \leq e^{-t}$, comme l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, alors par le critère de comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}$ converge ⊠

Le résultat qui suit est analogue à celui obtenu pour les séries à termes positifs.

Théorème 5 (Relations de comparaison).

Soient $f,g:[a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant $f(t)=\underset{t\to b^-}{o}(g(t))$ (resp. $f(t)=\underset{t\to b^-}{O}(g(t))$, alors

1. $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
   Dans ce cas $\displaystyle\int_x^b f(t)dt=\underset{x\to b^-}{o}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$ $\left(\text{resp. } \displaystyle\int_x^b f(t)dt=\underset{x\to b^-}{O}\left(\int_x^b g(t)dt\right)\right)$
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.
   Dans ce cas $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=\underset{x\to b^-}{o}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ $\left(\text{resp. } \displaystyle\int_a^x f(t)dt=\underset{x\to b^-}{O}\left(\int_a^x g(t)dt\right)\right)$

3) Critère d'équivalence

Théorème 6 (Critère d'équivalence).

Soient $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}^+$ vérifiant $f(t)\underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors

$$\int_a^b f(t)d\ \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_a^b g(t)dt\ \text{ converge}$$

De plus on a :

- En cas de convergence : $\displaystyle\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)dt.$
- En cas de divergence : $\displaystyle\int_a^x g(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)dt.$

Exemple Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\arctan(t)}dt$ ⊠

Solution

$f:t\longmapsto \frac{\sqrt{t}}{\arctan(t)}$ est continue et positive sur $]0,1]$ (donc le problème se pose en 0)

Comme $\arctan(t)\underset{t\to 0}{\sim} t$, alors $f(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{\sqrt{t}}{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}$

Puisque l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, par le critère d'équivalence, $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{\arctan(t)}dt$ converge ⊠

4) Comparaison séries-intégrales

Théorème 7 (Comparaison séries-intégrales).

On considère $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$,continue par morceaux, positive et décroissante, alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt\ \text{ converge}\quad\Longleftrightarrow \sum_{n\geq n_0} f(n)\ \text{ converge}$$

III) Intégrales absolument convergentes

1) Convergence absolue et fonctions intégrables

Définition 2 (Convergence absolue)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur I.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge.
- On dit que f est intégrable sur I si si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Remarque 4 (Critère d'équivalence et intégrabilité)**.**

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $|f(t)| \leq |g(t)|$ au voisinage de b, alors

$$g \text{ est intégrable sur } [a, b[\Longrightarrow f \text{ est intégrable sur } [a, b[$$

- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$ ou $f(t) \underset{t\to b}{=} O(g(t))$, alors

$$g \text{ est intégrable sur } [a, b[\Longrightarrow f \text{ est intégrable sur } [a, b[$$

- Si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$. alors

$$g \text{ est intégrable sur } [a, b[\Longleftrightarrow f \text{ est intégrable sur } [a, b[$$

Proposition 4.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ absolument convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on a

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Remarque 5.

En général, la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$

2) Critère de t^α

Technique 4.

① Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux, alors

- • S'il existe $\alpha > 1$ telle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ telle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

② Soit $f :]0, a] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, alors

- S'il existe $\alpha < 1$ telle que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^\alpha f(t) = 0$, alors $\displaystyle\int_0^a f(t)dt$ est absolument convergente.
- S'il existe $\alpha \geq 1$ telle que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^\alpha f(t) = +\infty$, alors $\displaystyle\int_0^a f(t)dt$ est divergente.

Exemple (Intégrale de Gauss)

① Montrer que l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et sa valeur à savoir $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (par parité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{2\pi}$).

② Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2}dt$ est convergente ⊠

Solution

① $f : t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (donc le problème se pose au voisinage de $+\infty$.

Comme $t^2e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

② $f : t \longmapsto P(t)e^{-t^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ (donc le problème se pose au voisinage de $\pm\infty$.

Comme $t^2\left(P(t)e^{-t^2}\right) \underset{t\to\pm\infty}{\to} 0$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2}dt$ converge ⊠

Exercice 4 (Intégrales de Bertrand)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

① Soit $a > 1$. Montrer que

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta} \text{ converge} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \text{ et } \beta \text{ quelconque} \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \;\; et \;\; \beta > 1 \end{cases}$$

② Soit $b \in]0, 1[$. Montrer que

$$\int_0^{b} \frac{dt}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta} \text{ converge} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \text{ et } \beta \text{ quelconque} \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

Solution

① Comme $a > 1$, alors $f : t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est continue sur $[a, +\infty[$ (donc le problème se pose en $+\infty$).

- Si $\alpha > 1$, comme $t^{\frac{\alpha+1}{2}}f(t) = \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln(t))^\beta} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ (car $\frac{\alpha-1}{2} > 0$) et $\frac{\alpha+1}{2} > 1$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ converge.
- Si $\alpha < 1$, comme $t^{\frac{\alpha+1}{2}}f(t) = \frac{t^{\frac{1\alpha}{2}}}{(\ln(t))^\beta} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ (car $\frac{1-\alpha}{2} > 0$) et $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ diverge.
- Si $\alpha = 1$, soit $x \in [a, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta} &= \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\beta}(\ln(t))^{1-\beta}\right]_a^x & si\ \beta \neq 1 \\ [\ln(\ln(t))]_a^x & si\ \beta = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(x))^{1-\beta} - (\ln(a))^{1-\beta}\right) & si\ \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a)) & si\ \beta = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta}$ admet une limite finie si, et seulement si, $\beta > 1$.

② Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ donne : $\displaystyle\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta} = \int_a^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha}\ln(u)^\beta}$ avec $a = \frac{1}{b} > 1$, car $0 < b < 1$.

Par la question précédente, on déduit l'équivalence en question ⊠

Exemple Étudier l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t+3}-1}dt$ ⊠

Solution

$f : t \longmapsto \frac{\ln(t)\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t+3}-1}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ (donc le problème se pose en $+\infty$)

Au voisinage de $+\infty$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)\frac{1}{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}(\ln(t))^{-1}}$

D'après l'exercice précédent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}(\ln(t))^{-1}}$ converge (Intégrale de Bertrand avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), d'après le critère d'équivalence, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente ⊠

3) Critère de 'prolongement par continuité'

Proposition 5 (en une borne finie).

Soient $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux et $b \in \mathbb{R}$, si $\lim_{t \to b^-} f(t)dt$ existe et finie, (donc f est prolongeable par continuité en b), alors f est intégrable sur $[a, b[$, en particulier $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemple (Intégrale de Dirichlet)

L'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente et sa valeur à savoir $\frac{\pi}{2}$ ⊠

Solution

$f : t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (donc le problème se pose au voisinage de 0 et $+\infty$)

▶ **Au voisinage de 0 :**

On a $f(t) \underset{t \to 0}{\to} 1$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

▶ **Au voisinage de $+\infty$:**

Soit $x \geq 1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{t}(-\cos(t))'dt$, par une intégration par par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt &= \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt \\
&= \frac{-\cos(x)}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt \\
&\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt
\end{aligned}$$

(L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ existe, car $0 \leq \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge)

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente ⊠

4) Une technique pour montrer une fonction n'est pas intégrable

Technique 5.

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. S'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[a, b[$ qui tend vers b et la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|dt$ diverge, alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

Exercice 5 (Intégrale de Dirichlet)

.

On a vu que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

On se propose de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ diverge.

① Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi}\frac{1}{n+1}$.

② En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ diverge.