Problème : Transformation de Fourier

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classes $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$) à valeurs complexes.
Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et tout réel x, on pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt$$

lorsque cette quantité a un sens. Quand elle est définie, La fonction $\widehat{f}$ s'appelle la transformée de FOURIER de f.

I. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

① **Soient x et α deux réels strictement positifs.**

(a) **Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, \alpha]$.**

(b) **Montres que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$.**

② **Dans la suite, φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par**

$$\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

(a) **Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.**

(b) **Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de φ' .**

(c) **Montrer que, lorsque x tend vers 0^+,$\varphi(x) + \ln(x)$ tend vers**

$$C = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

(on pourra exprimer $\ln x$ sous forme d'une intégrale.)

(d) **Montrer que, pour tout $x > 0$,**

$$\varphi(x) + \ln(x) = C + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

et en déduire que

$$\varphi(x) + \ln(x) = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{k!}$$

③ **Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par**

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(|x|)$$

(a) **Montrer que ψ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.**

(b) **Justifier que, pour tout$x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\psi}(x)$ a un sens et que**

$$\widehat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt$$

(c) Montrer que $\widehat{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives sous forme d'intégrales.

(d) Montrer que, pour tout réel non nul x, on a

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$$

et calculer $\widehat{\psi}(0)$ (on pourra effectuer une intégration par parties)

④ **(a)** Montrer que la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\Phi'(x)$,pour tout $x > 0$, puis l'exprimer sans utiliser le signe intégrale.

(b) En déduire soigneusement que pour tout réel non nul x,

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

① Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

(a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que pour tout réel x, $\widehat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction $\widehat{f}(x)$ est bornée.

(b) Si en plus f est continue, montrer que $\widehat{f}(x)$ est aussi continue.

② Transformations

(a) Montrer que l'application $F : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ définie sur l'espace vectoriel des fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$
Dans la suite de cette question, f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Vérifier que pour tout réel a, les fonctions $f_a : t \mapsto f(t-a)$ et ${}_af : t \mapsto f(at)$ possèdent des transformées de Fourier et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f_a}(x) = e^{iat}\widehat{f}(x) \text{ et } \widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{x}{a}) \ (a \neq 0)$$

(c) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application t$\mapsto f(t)e^{iat}$ en fonction de celle de f.

(d) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformée de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.

(e) Que peut-on alors dire de la transformée de Fourier d'une fonction réelle et paire (resp. impaire).

③ Dérivation

On considère un élément f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$

(a) Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

(b) Montrer alors que $\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x)$
puis en déduire que $\widehat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

(c) On suppose de plus que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer qu $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\widehat{f}\right)'(x) = -i\widehat{g}(x).$$

*** Fin de l'énoncé ***