Problème : La série exponentielle

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle que $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Dans la partie 1, on établit quelques propriétés de l'exponentielle matricielle. Dans la partie 2, on se propose de donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(A)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dans la dernière partie, on établit que l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$.
Les trois parties sont dépendantes.

Partie 1 : L'exponentielle matricielle. Propriétés

① **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.**

On définit alors l'exponentielle de la matrice A par $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

② **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

(a) **Justifier que $\mathbb{C}[A]$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et montrer que $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.**

(b) **Montrer que si $A = PBP^{-1}$ avec $(B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.**

(c) **Montrer que $Sp(\exp(A)) = \{e^\lambda,\ \lambda \in Sp(A)\}$ et que $det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}$.**

(d) **L'application exp est-elle surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$?**

③ **On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ ses valeurs propres complexes deux à deux distinctes.**

Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on définit le i-ème polynôme d'interpolation de Lagrange par : $L_i = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$.

(a) **Montrer que $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$.**

(b) **Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, Montrer que $AX = \lambda X \Rightarrow \exp(A)X = \exp(\lambda)X$.**

(b) **Montrer que $\exp(A) = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i} L_i(A)$.**

④ **Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

"On admet que le résultat du produit de Cauchy, vu en cours, reste valable pour les séries de matrices".

(a) **On suppose que A et B commutent, montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.**

(b) **En déduire que $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$ et que $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.**

Partie 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(A)$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On admet la décomposition de Dunford suivante: pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple de

matrices (D,N) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\begin{cases} M = D+N; \\ D \ \textbf{est diagonalisable}; \\ N \ \textbf{est nilpotent} \\ D \ et \ N \ \textbf{commutent}. \end{cases}$$

En plus D et N sont des polynômes en M et $Sp(D) = Sp(A)$.
Un tel couple (D,N) s'appelle la décomposition de Dunford de M.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et (D,N) sa décomposition de Dunford.

On se propose montrer que: A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \exp(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

① **On suppose dans cette question que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**
Montrer que $\exp(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

② **On suppose dans cette question que $\exp(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

(a) **Montrer que $(\exp(D), \exp(D)(\exp(N) - I_n))$ est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$.**

(b) **Montrer que $\exp(N) = I_n \iff N = 0$.**

(c) **Justifier que $\exp(N) = I_n$ et conclure que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

③ **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que**

$$\exp(A) = I_n \iff A \textbf{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \textbf{ et } Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$$

Partie 3 : L'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$

On considère $A \in GL_n(\mathbb{C})$, et (D,N) sa décomposition de Dunford.

On se propose de montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ telle que $\exp(P(A)) = A$.

① **Vérifier qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{C}^*$ deux à deux distincts, telles que**
$D = P\textbf{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_p, ..., \lambda_p)P^{-1}$.

② **Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(D)) = D$.**

On note r l'indice de nilpotence de N et on pose $S(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$ et $T(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{X^k}{k!}$.
On rappelle les développements limités à l'ordre $r-1$ suivantes: $\ln(1+x) = S(x) + o(x^{r-1})$ et $\exp(x) = T(x) + o(x^{r-1})$.

③ **Vérifier que la matrice $S(D^{-1}N)$ est un polynôme en A et nilpotente d'indice inférieure au égale à r.**

④ (a) **Montrer qu'il existe $V \in \mathbb{R}[X]$, tel que $S(T(x)) = 1 + x + x^r V(x)$.**
(b) **En déduire que $\exp\left(S(D^{-1}N)\right) = I_n + D^{-1}N$.**

⑤ **En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$.**

⑥ **Montrer que l'application $A \mapsto \exp(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

⑦ **En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

⑧ **$GL_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?**

*******Fin de l'énoncé******

Partie 1 : L'exponentielle matricielle. Propriétés

① Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a $\forall k \in \mathbb{N}, ||\dfrac{A^k}{k!}|| \leq \dfrac{||A||^k}{k!} = u_k$.

• **Si** $A = 0$, **alors** $\forall k \geq 1$, $u_k = 0$, **donc la série** $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ **converge.**

• **Si** $A \neq 0$, **alors** $\forall k \geq 0, u_k = \frac{||A||^k}{k!} > 0$, **on donc appliquer le critère d'Alembert, or** $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{||A||}{k+1} \to l = 0 < 1$, **alors la série** $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ **converge.**

Puisque la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ **converge et** $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq ||\dfrac{A^k}{k!}|| \leq u_k$, **alors d'après le critère de comparaison, la série** $\sum\limits_{k\geq 0} ||\dfrac{A^k}{k!}||$ **converge, ainsi la série** $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{A^k}{k!}$ **converge absolument.**

Comme l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **est de dimension finie, alors toute série absolument convergente à termes dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **est convergente.**

Ainsi la série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{A^k}{k!}$ **converge.**

② Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) • Comme $\mathbb{C}[A]$ **est un sous espace vectoriel de dimension finie de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **car** $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **est de dimension finie (plus précisément, on a** $\dim(\mathbb{C}[A]) = \deg(\pi_A)$**), alors** $\mathbb{C}[A]$ **est un fermé** $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**.**

• **Par définition on a** $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!} = \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{A^k}{k!}$. **Pour tout** $m \in \mathbb{N}$, **on pose** $x_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{A^k}{k!} = P_m(A) \in \mathbb{C}[A]$ **où** $P_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{X^k}{k!}$, **comme** $\mathbb{C}[A]$ **est un fermé de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **et** $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ **est une suite d'éléments de** $\mathbb{C}[A]$.

Alors $\exp(A) = \lim\limits_{m\to+\infty} x_m \in \mathbb{C}[A]$.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}$, **on a pour tout** $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$, **alors** $\sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{A^k}{k!} = P \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{A^k}{k!} P^{-1}$

Comme l'application $X \mapsto PXP^{-1}$ **est continue sur** $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, **car linéaire en dimension finie, par passage à la limite dans l'égalité** $(*)$, **on déduit que** $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

(c) Montrer que $Sp(\exp(A)) = \{e^\lambda,\ \lambda \in Sp(A)\}$ **et que** $det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}$.

La matrice A **est trigonalisable dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, **ainsi** $\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$ **et** $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont** $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ **les valeurs propres de** A **telles que** $A = PTP^{-1}$, **d'après la question précédente, on a** $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$.

Comme T **est triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont** $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, **alors pour tout** $k \in \mathbb{N}$, T^k **est triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont** $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$, **on a alors** $\exp(T)$ **est triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont** $\exp(\lambda_1), \cdots, \exp(\lambda_n)$, **puisque** $\exp(T)$ **est triangulaire supérieure, alors** $Sp(\exp(T)) = \{\exp(\lambda_1), \cdots, \exp(\lambda_n)\}$ **et** $\det(\exp(T)) = \prod\limits_{k=1}^{n} \exp(\lambda_k) = \exp(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k) = \exp(Tr(A))$. **Puisque** $\exp(A)$ **est** $\exp(T)$ **sont semblables, alors** $Sp(\exp(A)) = Sp(\exp(T)) = \{\exp(\lambda_1), \cdots, \exp(\lambda_n)\}$ **et** $\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) = \exp(Tr(A))$.

(d) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, **on a** $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A)) > 0$, **car** $Tr(A)$ **est réel (l'exponentielle réelle est strictement positive)**

Donc $B = diag(-1, 1, \cdots, 1)$, **n'a pas d'antécédent par** $exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$.

Ainsi l'application exp $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **dans** $GL_n(\mathbb{R})$ **n'est pas surjective.**

③ On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **diagonalisable et** $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ **ses valeurs propres complexes deux à deux distinctes.**

Pour $i \in [\![1, p]\!]$ **on définit le** i**-ème polynôme d'interpolation de Lagrange par :** $L_i = \prod\limits_{k\neq i} \dfrac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$.

(a) Montrons que $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$.
Comme $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est de cardinal $p = \dim(\mathbb{C}_{p-1}[X])$, il suffit de montrer que cette famille est libre.
Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i L_i = 0$. Pour tout $j \in [1, p]$, on a $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i L_i(\alpha_j) = 0$, puisque $L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker, alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_{i,j} = 0$, donc $\alpha_j = 0$, car $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

(b) Montrons que $AX = \lambda X \Rightarrow \exp(A)X = \exp(\lambda)X$.
On a $AX = \lambda X$, alors par récurrence simple sur $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k X = \lambda^k X$.
Soit $m \in \mathbb{N}$, on a $\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\right) X = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{k!}\right) X \;\; (*)$.
Comme l'application $M \mapsto M \times X$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, car linéaire en dimension finie et $z \mapsto z.X$ est continue sur $\mathbb{C}$, car linéaire en dimension finie.
Alors, en passant à la limite dans l'égalité $(*)$, on déduit que $\exp(A)X = \exp(\lambda)X$.

(c) Montrons que $\exp(A) = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i} L_i(A)$.
• Puisque A est diagonalisable, alors π_A est scindé à racines simples, et ses racines sont exactement les valeurs propres de A, donc $\pi_A = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$, en particulier $\deg(\pi_A) = p$, on sait que on sait que $\mathbb{C}[A] = vect(I_n, A, \cdots, A^{p-1})$ car $\deg(\pi_A) = p$.
• D'après la question ② (a), on a $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$, Donc $\exists P \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$, tel que $\exp(A) = P(A)$, puisque $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$, alors $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ tel que $P = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k$. Donc $\exp(A) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k(A)$.
• Soit $i \in [1, p]$, montrons que $\alpha_i = \exp(\lambda_i)$, comme λ_i est une valeur propre de A, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = \lambda X$, d'après la question précédente, on a $\exp(A)X = \exp(\lambda)X$.
D'autre part, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k(A)X = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k(\lambda_i)X = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \delta_{k,i} X = \alpha_i X$, car $\delta_{k,i} = 0$ si $k \neq i$.
Donc $\alpha_i X = \exp(\lambda_i)X$, puisque X est non nul, alors $\alpha_i = \exp(\lambda_i)$.
Par suite $\exp(A) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k(A) = \sum_{k=1}^{p} \exp(\lambda_k) L_k(A)$

④ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) On suppose que A et B commutent, montrons que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
On a $\exp(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}$ et $\exp(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j}{!}$, on pose $a_i = \frac{A^i}{i!}$ et $b_j = \frac{A^j}{j!}$, comme les séries $\sum_{i \geq 0} a_i$ et $\sum_{j \geq 0} b_j$ convergent absolument, alors la série produit de Cauchy $\sum_{k \geq 0} c_k$ converge absolument où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ avec $\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$. On a $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$
Comme A et B commutent, par la formule du Binôme de Newton, on a $c_k = \frac{(A+B)^k}{k!}$.
Ainsi $\exp(A)\exp(B) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \exp(A + B)$.

(b) Comme A et $-A$ commutent, alors $\exp(A)\exp(-A) = \exp(A + (-A)) = \exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}) = I_n$
Donc $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

Partie 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(A)$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

① On suppose dans cette question que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrons que $\exp(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $D = diag(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale ($a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ non nécessairement distincts.) telles $A = PDP^{-1}$.

Puisque $A = PDP^{-1}$, en appliquant la question ② (b) du partie 1, on trouve $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$, or $D = diag(a_1, \cdots, a_n)$ est diagonale, alors $\exp(D) = diag(\exp(a_1), \cdots, \exp(a_n))$.
Donc $\exp(A)$ est semblable à $\exp(D)$ et cette dernière est diagonale, alors $\exp(A)$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

② **On suppose dans cette question que $\exp(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

(a) **Montrons que $(\exp(D), \exp(D)(\exp(N) - I_n))$ est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$.**

• **On a D et N commutent, alors $\exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D + N) = \exp(A)$.**

• **D'après la question ② (a) du partie 1, on a $\exp(D)$, (resp. $\exp(N)$) est un polynôme en D (resp. N) et comme D et N sont des polynômes en A, alors $\exp(D)$ et $\exp(N)$ sont des polynômes en A, ainsi $\exp(D)$ et $\exp(D)(\exp(N) - I_n)$ sont des polynômes en A, par suite commutent.**

• **- Comme D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors d'après la question précédente, $\exp(D)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**
- Vérifions que $\exp(D)(\exp(N) - I_n)$ est nilpotente. N étant nilpotente, donc $\exists r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^r = 0$, par suite $\exp(N) - I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!} - I_n = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$. Donc $\exp(D)(\exp(N) - I_n)) = \exp(D)\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$, puisque $\exp(D), \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \frac{N^{k-1}}{k!}$ et N sont des polynômes en A, donc commutent.
Alors $[\exp(D)(\exp(N) - I_n))]^r = (\exp(D))^r \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \frac{N^{k-1}}{k!}\right)^r N^r = 0$, car $N^r = 0$.

(b) **Montrons que $\exp(N) = I_n \Leftrightarrow N = 0$.**

L'implication indirecte est triviale, montrons l'implication directe.
La matrice N est nilpotente, notons $\exists p \in \mathbb{N}^*$ son indice de nilpotente($N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$), par suite $\exp(N) - I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} - I_n = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = 0$, posons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{X^k}{k!}$, on a donc $P(N) = 0$, comme P est annultaeur de N, alors $\pi_N = X^p$ divise $P(X)$, donc $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)\pi_N$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{X^k}{k!} = Q(X)X^p$

Montrons que $p = 1$, par absurde, si $p \geq 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{X^k}{k!} = Q(X)X^p$, en simplifiant par X (L'anneau $\mathbb{C}[X]$ est intègre), on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{X^{k-1}}{k!} = Q(X)X^{p-1}$ et en substituant X en 0, on trouve $1 = 0$, ce qui est absurde, donc $p = 1$, par suite $N = 0$.
(c) **• Justifions que $\exp(N) = I_n$.**
D'après la question ② (a) du partie 2, on a $(\exp(D), \exp(D)(\exp(N) - I_n))$ est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$, comme $\exp(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $(\exp(A), 0)$ est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$, or la décomposition de Dunford est unique, alors $\exp(D) = \exp(A)$
et $\exp(D)(\exp(N) - I_n)) = 0$. D'après la question ④ (b) du partie 1, on a $\exp(D)$ est inversible, or $\exp(D)(\exp(N) - I_n)) = 0$ et $\exp(D)$ est inversible, alors $\exp(N) - I_n = 0$, d'où $\exp(N) = I_n$.

• **Puisque $\exp(N) = I_n$, d'après la question précédente, on a $N = 0$, ainsi $A = D + N = D$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

③ **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons que $\exp(A) = I_n \Leftrightarrow A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.**

$\Rightarrow$ **On a $\exp(A) = I_n$ est diagonalisable, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**
Soit $\lambda \in Sp(A)$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, tel que $AX = \lambda X$, d'après la question ③ (b) du partie 1, on a $X = \exp(A)X = \exp(\lambda)x$, puisque X est non nul, alors $\exp(\lambda) = 1$, d'où $\lambda = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, par suite $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

$\Leftarrow$ **Comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\mu_1, \cdots, \mu_n \in 2i\pi\mathbb{Z}$ telles que $A = Pdiag(\mu_1, \cdots, \mu_n)P^{-1}$, donc $\exp(A) = P\exp(diag(\mu_1, \cdots, \mu_n))P^{-1} = Pdiag(\exp(\mu_1), \cdots, \exp(\mu_n))P^{-1}$.**
On a $\mu_1, \cdots, \mu_n \in 2i\pi\mathbb{Z}$, alors $\exp(\mu_1) = \cdots = \exp(\mu_n) = 1$, d'où $\exp(A) = PI_nP = I_n$.

Partie 3 : L'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$

On considère $A \in GL_n(\mathbb{C})$, et (D, N) sa décomposition de Dunford.

On se propose de montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ telle que $\exp(P(A)) = A$.

① **On a D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts telles que $D = Pdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_p, \cdots, \lambda_p)P^{-1}$ avec λ_k se répète m_k fois (m_k désigne la multiplicité de la valeur propre λ_k).**
Puisque $Sp(D) = Sp(A)$ et $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $0 \notin Sp(A) = Sp(D)$, par suite $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{C}^*$.

② **Montrons qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(D)) = D$.**

Pour tout $k \in [1, p]$, λ_k est non nul, comme l'application $z \mapsto \exp(z)$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$, alors il existe $\beta_k \in \mathbb{C}$, telle que $\lambda_k = \exp(\beta_k)$.
On considère le polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ défini par $Q(X) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i L_i$ où les L_i sont définies dans la partie 1, alors pour tout $k \in [1, p]$, on a $Q(\lambda_k) = \beta_k$, donc $\exp(Q(\lambda_k)) = \lambda_k$.

On a $Q(D) = Pdiag(Q(\lambda_1), \cdots, Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_p), \cdots, Q(\lambda_p))P^{-1}$
Donc $\exp(Q(D)) = Pdiag(\exp(Q(\lambda_1)), \cdots, \exp(Q(\lambda_1)), ..., \exp(Q(\lambda_p)), \cdots, \exp(Q(\lambda_p)))P^{-1}$
Alors $\exp(Q(D)) = Pdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, ..., \lambda_p), \cdots, \lambda_p)P^{-1} = D$

On note r l'indice de nilpotence de N.

③ **• Comme D et N sont des polynômes en A, alors D^{-1} est un polynôme en A, par suite $S(D^{-1}N)$ est un polynôme en A.**

• Puisque D et N commutent, alors D^{-1} et N commutent, donc $S(D^{-1}N) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(D^{-1}N)^k = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(D^{-1})^k N^k = \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(D^{-1})^k N^{k-1}\right) N$, par suite $\left[S(D^{-1}N)\right]^r = \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(D^{-1})^k N^{k-1}\right)^r N^r = 0$

④ **(a) On $1 + x = \exp(\ln(1 + x)) = S(T(x)) + o(x^{r-1})$, par unicité du développement limité de $S(T(x))$ à l'ordre $r - 1$, on a $1 + x$ est la partie régulière du développement limité de $S(T(x))$, comme $S(T(x))$ est un polynôme, il existe $V \in \mathbb{C}[X]$ tel que $S(T(x)) = 1 + x + x^r V(x)$.**

(b) On a $\exp(S(D^{-1}N)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(S(D^{-1}N))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(S(D^{-1}N))^k}{k!}$ car $S(D^{-1}N)$ est nilpotente d'indice $\leq r$.
Alors $\exp\left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(D^{-1}N)^k\right) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(S(D^{-1}N))^k}{k!} = T(S(D^{-1}N)) = I_n + D^{-1}N$.

⑤ **D'après la question précédente, on a $\exp\left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(D^{-1}N)^k\right) = I_n + D^{-1}N$, et d'après la question ③, $\sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(D^{-1}N)^k$ est un polynôme en A, donc $\exists R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(D^{-1}N)^k = R(A)$**
D'après la question ②, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(D)) = D$.
On a $A = D + N = D(I_n + D^{-1}N) = \exp(Q(D))\exp(R(A)) = \exp(Q(D) + R(A))$, car D est un polynôme en A. Comme D est un polynôme en A, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $Q(D) + R(A) = P(A)$, d'où le résultat.

⑥ **Pour la continuité de l'application $A \mapsto \exp(A)$, on a besoin des outils que vous allez voir au chapitre: suites et séries de fonctions.**

⑦ **Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est convexe, donc connexe par arcs.**
Puisque $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ continue et surjective, alors $GL_n(\mathbb{C}) = \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ est connexe par arcs.
⑧ **Par absurde, si $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A, par suite $\mathbb{R}^* = \det(GL_n(\mathbb{R}))$ (car $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \det(\lambda, 1, \cdots, 1) = \lambda$ et $\det(GL_n(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}^*$) est connexe par arcs de $\mathbb{R}$, ce qui est absurde, car les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.