Problème : La Fonction zêta de Riemann

▶ **On définit la fonction zêta de Riemann par:**

$$\forall x > 1, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

▶ **On appelle suite harmonique la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par :**

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

▶ **On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ définie par:**

$$\varphi(n) = \mathbf{card}\{k \in [\![0, n]\!], \quad k \wedge n = 1\}$$

Partie 1: Calcul de $\zeta(2)$ (Extrait du CNC 2017)

On se propose de montrer que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

① **Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}$.**

② **Soit $x \in]0, \pi]$**

(a) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$**

(b) **En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$**

③ **Soit φ une fonction réelle de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que**

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^\pi \varphi(x)\sin(mx)dx = 0$$

④ **Soit f la fonction réelle définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin(\frac{x}{2})} & \textbf{si } x \in]0, \pi] \\ -1 & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$**

Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. "On pourra utiliser le théorème de prolongement de classe C^1"

⑤ (a) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(x)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)dx$$

(b) **Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$**

Partie 2: Développement asymptotique de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

La suite harmonique $(H_n)_{n\geq 1}$ est définie par : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

① **Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, en utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, montrer que $\frac{1}{k^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha}$.**

② **En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.**

③ **On définit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par $x_n = H_n - \ln(n)$.**

(a) Montrer que $x_{n-1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

(b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Notons γ sa limite. γ s'appelle la constante d'Euler.

④ **(a) Montrer que $x_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.**

(b) En déduire le développement asymptotique de $(H_n)_{n\geq 1}$: $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

⑤ **Établir la relation**

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

Partie 3: La fonction zêta et familles sommables

On admet le développement en série entière de $\ln(1+x)$ donné par :

$$\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

① **Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$.**

(a) Justifier que, pour tout $n \geqslant 2$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{z^k}{n^k}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

(b) En déduire que la famille $\left(\frac{z^k}{n^k}\right)_{k,n\geqslant 2}$ de nombres complexes est sommable.

(c) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^2}{n(n-z)} = \sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k)-1) z^k$.

(d) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k)-1)$.

② **(a) Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{k,n\geq 2}$ est sommable.**

(b) En utilisant la question ⑤ du partie 2, montrer que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) = \gamma$$

③ **Pour tout $n \geq 2$, on pose $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ p+q = n\}$.**

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la partition $(I_n)_{n\geq 2}$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\left(\frac{1}{(p+q)^x}\right)_{p,q\geq 1} \text{ est sommable } \iff x > 2 \text{ et } \forall x > 2,\quad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q)^x} = \zeta(x-1) - \zeta(x)$$

(b) En déduire que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{p,q\geq 1}$ n'est pas sommable.

④ **Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \ pq = n\}$**

En utilisant la partition $(J_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, établir la relation

$$\forall x > 2,\quad \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x}$$

*******Fin de l'énoncé******