Problème : Sur l'équation des cordes vibrantes

Dans ce problème, $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$)) désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$), et c est un réel strictement positif.

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{I}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

où $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ est une fonction inconnue élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Partie I : Résolution par la méthode de D'Alembert

① Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, montrer que $\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = 0$ si et seulement si s'il existe deux fonctions F et G éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, telle que, pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $h(u,v) = F(u) + G(v)$.

② Soit $\varphi(x,t) \mapsto (u,v) = (x - ct, x + ct)$.

(a) Vérifier que φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite, ψ désigne l'automorphisme réciproque de φ.

(b) Prouver que l'application $\theta : f \mapsto f^* = f \circ \psi$ est un automorphisme de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

③ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ une solution de $(\mathcal{I})$.

(a) Calculer $\frac{\partial f^*}{\partial u}$, puis $\frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v}$.

(b) En déduire que f est de la forme $f : (x,t) \mapsto F(x-ct) + G(x+ct)$ où F et G sont deux éléments quelconque de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

③ Soit $\varphi_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer qu'il existe un unique élément f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, solution de $(\mathcal{I})$, que l'on exprimera en fonction de φ_0, satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

$$(1) \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = \varphi_0(x) & \text{(position initiale au temps } t = 0) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{(corde au temps } t = 0) \end{cases}$$

Partie II : Solutions stationnaires vérifiant des conditions aux limites

Une solution f de $(\mathcal{I})$ est dite stationnaire s'il existe deux fonctions g et h de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,t) = g(x)h(t).$$

① Soit λ une constante réelle. On suppose que g et g sont deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant le système

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} g'' = \lambda g \\ h'' = \lambda c^2 h \end{cases}$$

Etablir que la fonction $f : (x,t) \mapsto g(x)h(t)$ est solution de $(\mathcal{I})$.

② Réciproquement, on suppose que g et h sont deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tels que la fonction $(x,t) \mapsto g(x)h(t)$ soit solution de $(\mathcal{I})$ non identiquement nulle.

Prouver l'existence d'un réel λ tel que g et h soient solution du système (S_λ).

③ Soit a un réel strictement positif.

(a) Résoudre l'équation différentiel $y'' = \mu y$ selon les valeurs du réel μ.
On distinguera les trois cas $\mu = 0$, $\mu > 0$ et $\mu < 0$.

(b) Déterminer tous les réels μ de sorte que l'équation différentielle $y'' = \mu y$ admette une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition aux limites $y(0) = y(a) = 0$.
Expliciter l'ensemble des solutions correspondant à chacune de ces valeurs de μ.

(c) Déterminer alors l'ensemble des solutions stationnaires f de $(\mathcal{I})$ vérifiant la condition aux limites

$$(2) \quad \forall t \in \mathbb{R}, f(0,t) = f(a,t) = 0.$$

*** Fin de l'énoncé ***